无锡市 2021 届高三年级下学期教学质量检测试卷

数 学 试 题

2021.02

(总分 150 分，考试时间 120 分钟)

注意事项：

1．本试卷考试时间为 120 分钟，试卷满分 150 分，考试形式闭卷.

2．本试卷中所有试题必须作答在答题卡上规定的位置，否则不给分.

3．答题前，务必将自己的姓名、准考证号用 0．5 毫米黑色墨水签字笔填写在试卷及答题卡上.

第 I 卷（选择题　共 60 分）

一、单项选择题(本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的)

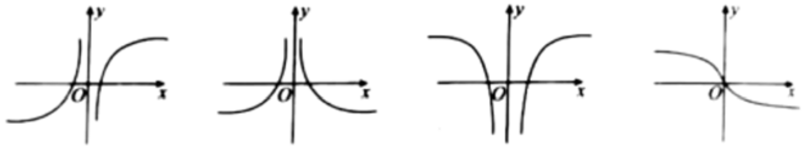
1．设集合 $M=\left\{x\mid 2^x>1\right\}$， $N=\left\{x\mid \frac{x+1}{x-1}<0\right\}$，则 $M\cap N$=（　　）

A．[0，1)　　B．(0，1)　　C．(－1，+∞)　　D．(1，+∞)

2．复数 $\frac{4i}{1+\sqrt{3}i}$ 的虚部为（　　）

A．1　　B．－1　　C．　$-i$　　D．　i

3．函数 $f(x)=\frac{x\ln|x|}{|x|}$ 的大致图象为（　）



A.　　B.　　C.　　D.

4．《九章算术》是我国古代的数学名著，书中有如下问题："今有五人分无钱，令上二人所得与下三人等，问各得几何？"其意思为："已知甲、乙、并、丁、戊五人分5钱，甲、乙两人所得之和与丙、丁、戊三人所得之和相同，且甲、乙、并、丁、戊所得依次为等差数列．问五人各得多少钱？"（"钱"是古代的一种重量单位）．这个问题中，戊所得为（　）

A．$\frac{4}{5}$钱　　B．$\frac{3}{4}$钱　　C．$\frac{3}{5}$钱　　D．$\frac{2}{3}$钱

5．若双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0，b>0\right)$的一条渐近线被圆$x^2+y^2-4y+2=0$所截得的弦长为2，则双曲线$C$的离心率为（　）

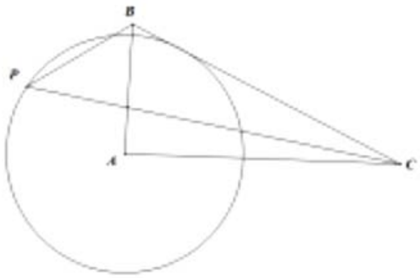
A．$\sqrt{3}$　　B．$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　C．2　　D．$\sqrt{2}$

6．果农采摘水果，采摘下来的水果会慢慢失去新鲜度．已知某种水果失去新鲜度 h 与其采摘后时间 t（天）满足的函数关系式为$h=m\cdot a^t$．若采摘后10天，这种水果失去的新鲜度为10%，采摘后20天，这种水果失去的新鲜度为20%．那么采摘下来的这种水果在多长时间后失去50%新鲜度（已知$\lg 2\approx 0.3$，结果取整数）（　）

A．23天　　B．33天　　C．43天　　D．50天

7．已知直角三角形ABC中，$\angle A=90°$，AB=2，AC=4，点 P 在以 A 为圆心且与边 BC 相切的圆上，则$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$的最大值为（　）

A．$\frac{16+16\sqrt{5}}{5}$　　B．$\frac{16+8\sqrt{5}}{5}$　　C．$\frac{16}{5}$　　D．$\frac{56}{5}$



8．已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases} e^{x}+4a，x>0 \\ 2-\log_{a}\left(x+1\right)，x\le 0 \end{cases}$ 在定义域上单调递增，且关于 x 的方程 $f\left(x\right)=x+2$ 恰有一个实数根，则实数 a 的取值范围为（　）

A．$\left[\frac{1}{4},1\right)$　　B．$\left[\frac{1}{4},\frac{1}{e}\right]$　　C．$\left[\frac{1}{e},1\right)$　　D．(0，1)

二、多项选择题(本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求的．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分)

9.有 3 台车床加工同一型号的零件.第 1 台加工的次品率为 6% ，第 2，3 台加工的次品率均为 5%，加工出来的零件混放在一起.已知第 1，2，3 台车床的零件数分别占总数的 25%，30%，45%，则下列选项正确的有(　　)

A．任取一个零件是第 1 台生产出来的次品概率为 0. 06

B．任取一个零件是次品的概率为 0. 0525

C．如果取到的零件是次品，且是第 2 台车床加工的概率为$\frac{2}{7}$

D．如果取到的零件是次品，且是第 3 台车床加工的概率为$\frac{2}{7}$

10．已知函数 $f\left(x\right)=\sin\left(\omega x+\varphi\right)\left(\omega>0,0<\varphi<\pi\right)$，将 $y=f\left(x\right)$ 的图象上所有点向右平移 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位长度，然后横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍，纵坐标不变，得到函数 $y=g\left(x\right)$ 的图象.若 $g\left(x\right)$ 为偶函数，且最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$，则下列说法正确的是（　）

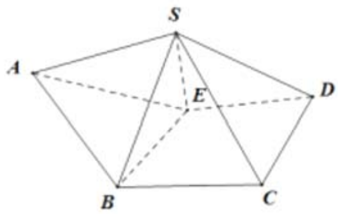
A．$y=f\left(x\right)$的图象关于$\left(\frac{\pi}{12},0\right)$对称

B．$f\left(x\right)$在$\left(0,\frac{5\pi}{12}\right)$上单调递减

C．$g\left(x\right)\geqslant\frac{1}{2}$的解为$\left[\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}\right]\left(k\in Z\right)$

D．方程 $f\left(x\right)=g\left(\frac{x}{2}\right)$在$\left(0,\frac{5\pi}{4}\right)$上有 2 个解

11．如图，正四棱锥 $S-BCDE$ 底面边长与侧棱长均为 a，正三棱锥 $A-SBE$ 底面边长与侧棱长均为 a，则下列说法正确的是（   ）



A．$AS\perp CD$

B．正四棱锥 $S-BCDE$ 的外接球半径为$\frac{\sqrt{2}}{2}a$

C．正四棱锥 $S-BCDE$ 的内切球半径为$\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)a$

D．由正四棱锥 $S-BCDE$ 与正三棱锥 $A-SBE$ 拼成的多面体是一个三棱柱

12．曲率半经是用来描述曲线上某点处曲线弯曲变化程度的量，已知对于曲线$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0，b>0\right)$上点$P\left(x_0，y_0\right)$处的曲率半径公式为$R=a^2b^2\left(\frac{{x_0}^2}{a^4}+\frac{{y_0}^2}{b^4}\right)^{\frac{3}{2}}$，则下列说法正确的是（   ）

A．对于半径为 R 的圆，其圆上任一点的曲率半径均为 R

B．椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>0，b>0\right)$上一点处的曲率半径的最大值为$a$

C．椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>0，b>0\right)$上一点处的曲率半径的最小值为$\dfrac{b^2}{a}$

D．对于椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1\left(a>1\right)$上一点$\left(\dfrac{1}{2}，y_0\right)$处的曲率半径随着$a$的增大而减小

第II卷（非选择题　共90分）

三、填空题(本大题共4小题，每小题5分，共20分)

13．设X是一个离散型随机变量，其分布列为：

X	1	2	3
P	$\dfrac{1}{2}$	$1-q$	$q-q^2$

则X的数学期望为_________.

14． $(1-2x)^5(1+3x)^4$ 的展开式中按x的升幂排列的第3项的系数为___________.

15．我国南北朝时代的祖暅提出“幂势既同，则积不容异”，即祖暅原理：夹在两个平行平面之间的两个几何体，被平行于这两个平面的任意平面所截，如果截得的两个截面的面积总是相等，那么这两个几何体的体积相等(如图1)．在xOy平面上，将双曲线的一支$\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$及其渐近线$y=\dfrac{1}{2}x$和直线$y=0$，$y=2$围成的封闭图形记为D，如图2中阴影部分．记D绕y轴旋转一周所得的几何体为Ω，利用祖暅原理试求Ω的体积为________.

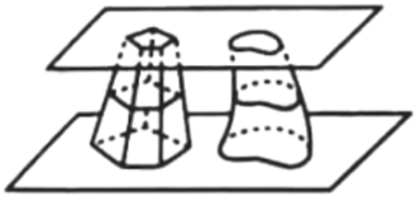


图 1

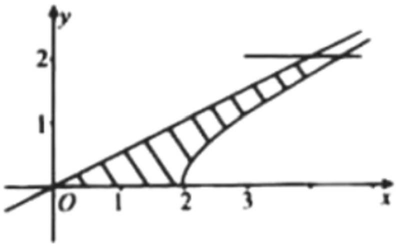


图 2

16．若 $\dfrac{\ln x+1}{x}\le ax+b$ 对于 $x\in\left(0,+\infty\right)$ 恒成立，当 a=0 时，b 的最小值为_____；当 a>0 时，$\dfrac{b}{a}$ 的最小值是_______________．(第一空 2 分，第二空 3 分)

四、解答题(本大题共 6 小题，共 70 分．解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17．(本小题满分 10 分)

在△ABC 中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，请在① $b+b\cos C=\sqrt{3}c\sin B$；② $\left(2b-a\right)\cos C=c\cos A$；③ $a^2+b^2-c^2=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}S_{\vartriangle ABC}$ 这三个条件中任意选择一个，完成下列问题：

（1）求∠C;

（2）若 a＝5，c＝7，延长 CB 到 D，使 $\cos\angle ADC=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$，求线段 BD 的长度.

注：如果选择多个条件解得，按第一个解答计分.

18．(本小题满分 12 分)

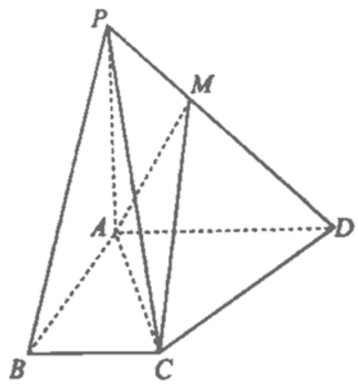
已知等差数列的首项为 2，前 n 项和为 S_n，正项等比数列$\{b_n\}$的首项为 1，且满足，前 n 项和为 $a_3=2b_2$，$S_5=b_2+b_4$.

（1）求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式；

（2）设 $c_n=(-1)^n\log_3 S_n+\log_3 b_n$，求数列$\{c_n\}$的前 26 项和.

19．(本小题满分 12 分)

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$平面 $ABCD$，$AD\parallel BC$，$\angle BAD=120°$，$AB=AD=2$，点 M 在线段 PD 上，且 $DM=2MP$，$PB\parallel$平面 MAC.



（1）求证：平面 $MAC\perp$平面 PAD；

（2）若 $PA=3$，求平面 PAB 和平面 MAC 所成锐二面角的余弦值．

20.(本小题满分 12 分)

已知某班有 50 位学生，现对该班关于“举办辩论赛”的态度进行调查，，他们综合评价成绩的频数分布以及对“举办辩论赛”的赞成人数如下表：

综合评价成绩（单位：分）	[40，50)	[50，60)	[60，70)	[70，80)	[80，90)	[90，100)
频数	5	10	15	10	5	5

赞成人数	4	8	12	4	3	1

（1）请根据以上统计数据填写下面 2×2 列联表，并回答：是否有 95%的把握认为“综合评价成绩以 80 分位分界点”对“举办辩论赛”的态度有差异？

	综合评价成绩小于 80 分的人数	综合评价成绩不小于 80 分的人数	合计
赞成			
不赞成			
合计			

（2）若采用分层抽样在综合评价成绩在[60，70)，[70，80)的学生中随机抽取 10 人进行追踪调查，并选其中 3 人担任辩论赛主持人，求担任主持人的 3 人中至少有 1 人在[60，70)的概率．

参考公式：$K^2=\dfrac{n\left(ad-bc\right)^2}{\left(a+b\right)\left(c+d\right)\left(a+c\right)\left(b+d\right)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

参考数据：

$P\left(K^2\geq k_0\right)$	0.10	0.05	0.010	0.005
k_0	2.706	3.841	6.635	7.879

21.(本小题满分 12 分)

已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0，b>0\right)$过点点(2，－1)，离心率位$\frac{\sqrt{3}}{2}$，抛物线$y^2=-16x$的准线$l$交$x$轴于点$A$，过点$A$作直线交椭圆$C$于$M$，$N$.

（1）求椭圆C的标准方程和点A的坐标；

（2）若M是线段AN的中点，求直线MN的方程；

（3）设P，Q是直线l上关于x轴对称的两点，问：直线PM于QN的交点是否在一条定直线上？请说明你的理由.

22.(本小题满分 12 分)

已知函数$f\left(x\right)=\ln x+\frac{a-e}{x}$，其中$e$是自然对数的底数.

（1）设直线$y=\frac{2}{e}x-2$是曲线$y=f\left(x\right)\left(x>1\right)$的一条切线，求$a$的值；

（2）若$\exists a\in R$，使得$f\left(x\right)+ma\geq 0$对$\forall x\in\left(0,+\infty\right)$恒成立，求实数$m$的取值范围.

无锡市 2021 届高三年级下学期教学质量检测试卷

数 学 试 题

2021.02

(总分 150 分，考试时间 120 分钟)

注意事项：

1．本试卷考试时间为 120 分钟，试卷满分 150 分，考试形式闭卷．

2．本试卷中所有试题必须作答在答题卡上规定的位置，否则不给分．

3．答题前，务必将自己的姓名、准考证号用 0．5 毫米黑色墨水签字笔填写在试卷及答题卡上．

第 I 卷（选择题　共 60 分）

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1．设集合 $M=\left\{x\,|\,2^x>1\right\}$，$N=\left\{x\,|\,\dfrac{x+1}{x-1}<0\right\}$，则 $M\cap N$=（　　）

A．[0，1)　　B．(0，1)　　C．(－1，+∞)　D．(1，+∞)

【答案】B

【解析】$M=\{x|x>0\}$，$N=\{x|-1<x<1\}$，$M\cap N=\{x|0<x<1\}$，故选 B.

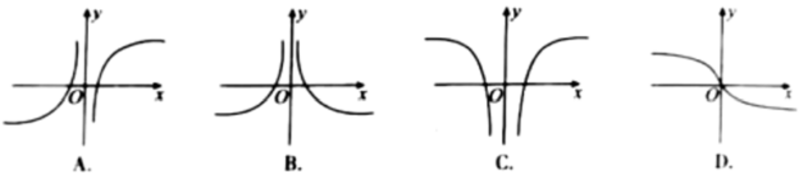
2．复数$\dfrac{4i}{1+\sqrt{3}i}$的虚部为（　　）

A．1　　B．－1　　C．　－i　　D．　i

【答案】A

【解析】$\dfrac{4i}{1+\sqrt{3}i}=\dfrac{4i(1-\sqrt{3}i)}{4}=i+\sqrt{3}=\sqrt{3}+i$，故选 A.

3．函数 $f(x)=\dfrac{x\ln|x|}{|x|}$的大致图象为（　）



【答案】A

4．《九章算术》是我国古代的数学名著，书中有如下问题：“今有五人分无钱，令上二人所得与下三人等，问各得几何？”其意思为：“已知甲、乙、并、丁、戊五人分 5 钱，甲、乙两人所得之和与丙、丁、戊三人所得之和相同，且甲、乙、并、丁、戊所得依次为等差数列．问五人各得多少钱？”（“钱”是古代的一种重量单位）．这个问题中，戊所得为（　）

A．$\dfrac{4}{5}$钱　　B．$\dfrac{3}{4}$钱　　C．$\dfrac{3}{5}$钱　　D．$\dfrac{2}{3}$钱

【答案】D

【解析】$a_1+a_2=a_3+a_4=a_5$，$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=5$，

$\begin{cases}a_1+a_1+d=\frac{5}{2}\\3a_4=\frac{5}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=\frac{4}{3}\\d=-\frac{1}{6}\end{cases}$，$\therefore a_5=\frac{4}{3}+\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}$，故选 D.

5. 若双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$ 的一条渐近线被圆 $x^2+y^2-4y+2=0$ 所截得的弦长为 2，则双曲线 C 的离心率为（　）

A. $\sqrt{3}$　　B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　C. 2　　D. $\sqrt{2}$

【答案】C

【解析】渐近线：$y=\frac{b}{a}x$，圆：$x^2+(y-2)^2=2$，$\frac{2a}{c}=1\Rightarrow\frac{c}{a}=2$，故选 C.

6．果农采摘水果，采摘下来的水果会慢慢失去新鲜度．已知某种水果失去新鲜度 h 与其采摘后时间 t（天）满足的函数关系式为 $h=m\cdot a^t$．若采摘后 10 天，这种水果失去的新鲜度为 10%，采摘后 20 天，这种水果失去的新鲜度为 20%．那么采摘下来的这种水果在多长时间后失去 50%新鲜度（已知 $\lg 2\approx 0.3$，结果取整数）（　）

A．23 天　　B．33 天　　C．43 天　　D．50 天

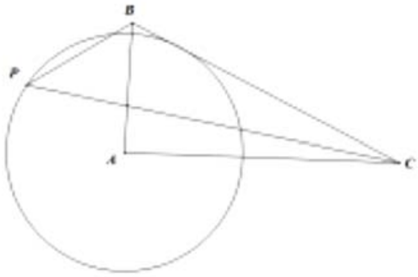
【答案】B

【解析】$\begin{cases}10\%=m\cdot a^{10}\\20\%=m\cdot a^{20}\end{cases}\Rightarrow a^{10}=2$，$50\%=m\cdot a^t$，$a^{t-10}=5\Rightarrow a^t=10$，$a=2^{\frac{1}{10}}$.

$\therefore 2^{\frac{t}{10}}=10\Rightarrow\frac{t}{10}\lg 2=1$，$t=\frac{10}{0.3}\approx 33$.故选 B.

7．已知直角三角形 ABC 中，$\angle A=90°$，AB=2，AC=4，点 P 在以 A 为圆心且与边 BC 相切的圆上，则 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$ 的最大值为（　）

A．$\dfrac{16+16\sqrt{5}}{5}$　　B．$\dfrac{16+8\sqrt{5}}{5}$　　C．$\dfrac{16}{5}$　　D．$\dfrac{56}{5}$



【答案】D

【解析】

法一：

以A为原点建系，$B(0,2)$，$C(4,0)$

$BC:\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{2}=1$，即$x+2y-4=0$，$r=\dfrac{4}{\sqrt{5}}$．

$\therefore$圆$A:x^2+y^2=\dfrac{16}{5}$，设BC中点为$D(2,1)$．

$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PD}^2-\dfrac{1}{4}BC^2=PD^2-\dfrac{1}{4}\times 20=PD^2-5$，

$PD_{\max}=AD+r=\sqrt{5}+\dfrac{4}{\sqrt{5}}=\dfrac{9}{\sqrt{5}}$，

$\therefore(\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC})_{\max}=\dfrac{81}{5}-5=\dfrac{56}{5}$，故选 D.

法二：

取BC中点M，

$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PM}^2-5$，而$PM\le\dfrac{4\sqrt{5}}{5}+\sqrt{5}=\dfrac{9\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}\le\dfrac{81}{5}-5=\dfrac{56}{5}$，故选 D.

8．已知函数 $f(x)=\begin{cases}e^x+4a，x>0\\2-\log_a(x+1)，x\le 0\end{cases}$ 在定义域上单调递增，且关于 x 的方程 $f(x)=x+2$ 恰有一个实数根，则实数 a 的取值范围为（　）

A. $\left[\frac{1}{4},1\right)$　　B. $\left[\frac{1}{4},\frac{1}{e}\right]$　　C. $\left[\frac{1}{e},1\right)$　　D. (0，1)

【答案】C

【解析】 $f(x)$在定义域上单调增，$\therefore\begin{cases}0<a<1\\4a+1\geq 2\end{cases}$，$\therefore\frac{1}{4}\leq a<1$.

$\because y=e^x+4a$在$x=0$处切线为$y-(4a+1)=x$，即$y=x+4a+1$.

$\therefore y=x+2$与$y=e^x+4a$最多有一个公共点$(0,2)$，

$\therefore y=x+2$与$y=2-\log_a(x+1)$有且仅有一个公共点.

$\therefore y=2-\log_a(x+1)$在$x=0$处的切线的斜率大于等于 1.

$y'=-\frac{1}{(x+1)\ln a}$，$k=-\frac{1}{\ln a}\geq 1$，$\therefore \ln a\geq -1\therefore a\geq\frac{1}{e}$.

综上：$\frac{1}{e}\leq a<1$，选 C.

二、多项选择题(本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求的．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分)

9.有 3 台车床加工同一型号的零件.第 1 台加工的次品率为 6% ，第 2，3 台加工的次品率均为 5%，加工出来的零件混放在一起.已知第 1，2，3 台车床的零件数分别占总数的 25%，30%，45%，则下列选项正确的有(　　)

A．任取一个零件是第 1 台生产出来的次品概率为 0. 06

B．任取一个零件是次品的概率为 0. 0525

C．如果取到的零件是次品，且是第 2 台车床加工的概率为$\frac{2}{7}$

D．如果取到的零件是次品，且是第 3 台车床加工的概率为$\frac{2}{7}$

【答案】BC

10．已知函数 $f\left(x\right)=\sin\left(\omega x+\varphi\right)\left(\omega>0,0<\varphi<\pi\right)$，将 $y=f\left(x\right)$的图象上所有点向右平移

$\frac{2\pi}{3}$个单位长度，然后横坐标缩短为原来的$\frac{1}{2}$倍，纵坐标不变，得到函数$y=g\left(x\right)$的图象.若$g\left(x\right)$为偶函数，且最小正周期为$\frac{\pi}{2}$，则下列说法正确的是（   ）

A．$y=f\left(x\right)$的图象关于$\left(\frac{\pi}{12},0\right)$对称

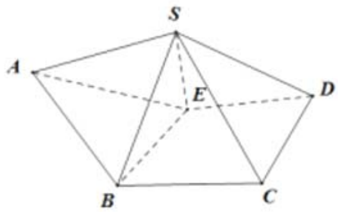
B．$f\left(x\right)$在$\left(0,\frac{5\pi}{12}\right)$上单调递减

C．$g\left(x\right)\geqslant\frac{1}{2}$的解为$\left[\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}\right]\left(k\in Z\right)$

D．方程$f\left(x\right)=g\left(\frac{x}{2}\right)$在$\left(0,\frac{5\pi}{4}\right)$上有 2 个解

【答案】AC

11．如图，正四棱锥 $S-BCDE$ 底面边长与侧棱长均为 a，正三棱锥 $A-SBE$ 底面边长与侧棱长均为 a，则下列说法正确的是（   ）



A．$AS\perp CD$

B．正四棱锥 $S-BCDE$ 的外接球半径为$\frac{\sqrt{2}}{2}a$

C．正四棱锥 $S-BCDE$ 的内切球半径为$\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)a$

D．由正四棱锥 $S-BCDE$ 与正三棱锥 $A-SBE$ 拼成的多面体是一个三棱柱

【答案】ABD

【解析】其中D选项可建系，设所有棱长均为$2a$，说明$AC=2\sqrt{3}a$，

从而$\angle ASB+\angle BSC=\angle ASC=\frac{2\pi}{3}$，从而说明四边形$ASCB$和$ASDE$均为平行四边形，

所以可拼成一个三棱柱

12．曲率半经是用来描述曲线上某点处曲线弯曲变化程度的量，已知对于曲线$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0，b>0\right)$上点$P\left(x_0，y_0\right)$处的曲率半径公式为$R=a^2b^2\left(\frac{{x_0}^2}{a^4}+\frac{{y_0}^2}{b^4}\right)^{\frac{3}{2}}$，则下列说法正确的是（　）

A．对于半径为R的圆，其圆上任一点的曲率半径均为R

B．椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0，b>0\right)$上一点处的曲率半径的最大值为$a$

C．椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0，b>0\right)$上一点处的曲率半径的最小值为$\frac{b^2}{a}$

D．对于椭圆$\frac{x^2}{a^2}+y^2=1\left(a>1\right)$上一点$\left(\frac{1}{2}，y_0\right)$处的曲率半径随着$a$的增大而减小

【答案】AC

【解析】法一： 圆：$x^2+y^2=R^2$．$P(x_0,y_0)$．

曲率半径$=R^2R^2\left(\dfrac{x_0^2}{R^2}+\dfrac{y_0^2}{R^2}\right)^{\frac{3}{2}}=R$．A 对；

$P(x_0,y_0)$ 在椭圆 $\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上，

$$\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}=\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{b^2-\dfrac{b^2}{a^2}x_0^2}{b^4}=\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{1}{b^2}-\frac{x_0^2}{a^2b^2}=\frac{1}{a^2}\left(\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{x_0^2}{b^2}\right)+\frac{1}{b^2}$$

$=\dfrac{-c^2}{a^4b^2}x_0^2+\dfrac{1}{b^2}$．$x_0^2\in\left[0,a^2\right]$．

$\therefore\dfrac{x_0^2}{a^4}+\dfrac{y_0^2}{b^4}\in\left[\dfrac{1}{a^2},\dfrac{1}{b^2}\right]$．$R\in\left[\dfrac{b^2}{a},\dfrac{a^2}{b}\right]$．$\therefore$B 错．C 对；

$$R=a^2\left(\frac{\frac{1}{4}}{a^4}+y_0^2\right)^{\frac{3}{2}}=a^2\left(\frac{1}{4a^4}+1-\frac{1}{4a^2}\right)^{\frac{3}{2}}=(a^{\frac{4}{3}})^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{4a^4}+1-\frac{1}{4a^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$=\left[a^{\frac{4}{3}}\left(\frac{1}{4a^4}+1-\frac{1}{4a^2}\right)\right]^{\frac{3}{2}}=\left[\frac{1}{4}a^{-\frac{8}{3}}+a^{\frac{4}{3}}-\frac{1}{4}a^{-\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}}$$

令 $f(a)=\dfrac{1}{4}a^{-\frac{8}{3}}+a^{\frac{4}{3}}-\dfrac{1}{4}a^{-\frac{2}{3}}$．$a>1$

$f'(a)=-\dfrac{8}{3}a^{-\frac{11}{3}}+\dfrac{4}{3}a^{\frac{1}{3}}+\dfrac{1}{6}a^{-\frac{5}{3}}=-\dfrac{1}{6}a^{-\frac{4}{3}}(4-8a^4-a^2)>0$．

$\therefore f(a)$ 在$(1,+\infty)\nearrow$．$\therefore R$ 随 a 增大而增大．D 错．

故选：AC.

法二：

对于A，曲率半径为$R^4\cdot\left(\frac{R^2}{R^4}\right)^{\frac{3}{2}}=R$，A正确；

对于B，C，$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$，$R=a^2b^2\left(\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}\right)^{\frac{3}{2}}$，

$\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}=\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{b^2}{b^4}\left(1-\frac{x_0^2}{a^2}\right)=\frac{1}{b^2}-\frac{(a^2-b^2)x_0^2}{a^4b^2}\le\frac{1}{b^2}$，

$\therefore R\le a^2b^2\cdot\frac{1}{b^3}=\frac{a^2}{b}$，B错；

$R\ge a^2b^2\left(\frac{1}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{b^2}{a}$，C正确；

对于D，$\frac{1}{4a^2}+y_0^2=1$，曲率半径$R=a^2\left(\frac{1}{4a^4}+y_0^2\right)^{\frac{3}{2}}=a^2\left(1-\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{4a^4}\right)^{\frac{3}{2}}$

求导易知R随a增大而增大，故选AC.

第II卷（非选择题　共90分）

三、填空题(本大题共4小题，每小题5分，共20分)

13．设X是一个离散型随机变量，其分布列为：

X	1	2	3
P	$\frac{1}{2}$	$1-q$	$q-q^2$

则X的数学期望为_________.

【答案】$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】$\frac{1}{2}+1-q+q-q^2=1\Rightarrow q^2=\frac{1}{2},q=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore E(X)=\frac{1}{2}+2-2q+3q-3q^2=\frac{5}{2}+q-3q^2=\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3}{2}=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

14． $(1-2x)^5(1+3x)^4$ 的展开式中按x的升幂排列的第3项的系数为___________.

【答案】-26

【解析】即求x^2的系数，前面取常数 1，后面取$C_4^2\cdot(3x)^2=54x^2$，

前面取$C_5^1\cdot(-2x)$，后面取$C_4^1\cdot 3x$，相乘得$-120x^2$，

前面取$C_5^2\cdot(-2x)^2$，后面取 1，相乘得$40x^2$，

故第 3 项系数为$54-120+40=-26$．

15．我国南北朝时代的祖暅提出“幂势既同，则积不容异”，即祖暅原理：夹在两个平行平面之间的两个几何体，被平行于这两个平面的任意平面所截，如果截得的两个截面的面积总是相等，那么这两个几何体的体积相等(如图 1)．在 xOy 平面上，将双曲线的一支$\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$及其渐近线$y=\dfrac{1}{2}x$和直线 $y=0$，$y=2$ 围成的封闭图形记为 D，如图 2 中阴影部分．记 D 绕 y 轴旋转一周所得的几何体为Ω，利用祖暅原理试求Ω的体积为________．

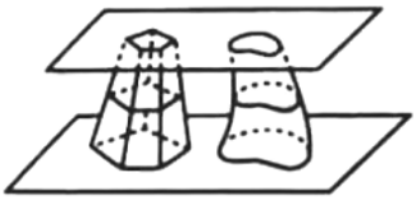


图 1

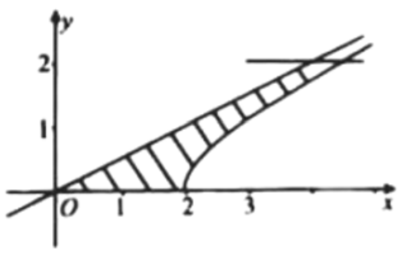


图 2

【答案】8π

【解析】直线$y=a(0\le a<2)$与渐近线$y=\dfrac{1}{2}x$交于点$(2a,a)$，

与双曲线一支$\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$交于点$(2\sqrt{1+a^2},a)$．

$\because D$绕y轴旋转一周所得的几何体为Ω，过$(0,y)(0\le y\le 4)$，

作Ω的水平截面，则截面面积为$S=\pi\left[(2\sqrt{1+a^2})^2-4a^2\right]=4\pi$，

利用祖暅原理得Ω的体积相当于底面面积为4π，高为 2：

$V=4\pi\times 2=8\pi$．

16．若$\dfrac{\ln x+1}{x}\le ax+b$对于$x\in\left(0,+\infty\right)$恒成立，当 a=0 时，b 的最小值为_____；当 a>0 时，$\dfrac{b}{a}$的最小值是_______________．(第一空 2 分，第二空 3 分)

【答案】1，$-\dfrac{1}{e}$

【解析】 $a=0$时，$b\ge\left(\dfrac{\ln x+1}{x}\right)_{\max}$，令$f(x)=\dfrac{\ln x+1}{x}$，

$f'(x)=\dfrac{1-\ln x-1}{x^2}=-\dfrac{\ln x}{x^2}$，令$f'(x)=0\Rightarrow x=1$，

且当$0<x<1$时，$f'(x)>0$，$f(x)\nearrow$；

当$x>1$时，$f'(x)<0$，$f(x)\searrow$.

$\therefore f(x)_{\max}=f(1)=1$，$\therefore b\ge 1$，$b_{\min}=1$.

令$x=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$得$a\cdot\dfrac{1}{\mathrm{e}}+b\ge 0$，$\dfrac{b}{a}\ge-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

取$\begin{cases}a=\mathrm{e}^2\\ b=-\mathrm{e}\end{cases}$知$\ln x+1\le(\mathrm{e}^2x-\mathrm{e})x$，

令$F(x)=\mathrm{e}^2x^2-\mathrm{e}x-\ln x-1$，$F'(x)=2\mathrm{e}^2x-\dfrac{1}{x}-\mathrm{e}$，

令$F'(x)=0\Rightarrow x=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，$F(x)$在$\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$上$\searrow$，$\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$上$\nearrow$，

$\therefore F(x)\ge F\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)=1-1+1-1=0$成立，$\therefore\left(-\right)\therefore\left(\dfrac{b}{a}\right)_{\min}=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

故应填：1，$-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

四、解答题(本大题共 6 小题，共 70 分．解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17．(本小题满分 10 分)

在△ABC 中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，请在①$b+b\cos C=\sqrt{3}c\sin B$；②$\left(2b-a\right)\cos C=c\cos A$；③$a^2+b^2-c^2=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}S_{\triangle ABC}$这三个条件中任意选择一个，完成下列问题：

（1）求∠C;

（2）若 $a=5$，$c=7$，延长 CB 到 D，使 $\cos\angle ADC=\frac{\sqrt{21}}{7}$，求线段 BD 的长度.

注：如果选择多个条件解得，按第一个解答计分.

【解析】

（1）$\because b+b\cos C=\sqrt{3}c\sin B$，及正弦定理，$\therefore \sin B+\sin B\cos C=\sqrt{3}\sin C\sin B$

$\because$ 在 ΔABC 中，$B\in(0,\pi)$，$\therefore \sin B>0$，$\therefore \sqrt{3}\sin C-\cos C=1$

$\therefore \sin C\cos\frac{\pi}{6}-\cos C\sin\frac{\pi}{6}=\sin(C-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$

$\because$ 在 ΔABC 中，$C\in(0,\pi)$，$\therefore C-\frac{\pi}{6}\in(-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6})$，$\therefore C-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，则 $C=\frac{\pi}{2}$.

选②

$\because (2b-a)\cos C=c\cos A$，及正弦定理，$\therefore 2\sin B\cos C-\sin A\cos C=\sin C\cos A$

$\therefore 2\sin B\cos C=\sin(A+C)$，$\because$ 在 ΔABC 中，$A+B+C=\pi$

$\therefore \sin(A+C)=\sin B$，$\therefore \cos C=\frac{1}{2}$，$\because$ 在 ΔABC 中，$C\in(0,\pi)$，$\therefore C=\frac{\pi}{3}$.

选③

$a^2+b^2-c^2=\frac{4\sqrt{3}}{3}S_{\Delta abc}=\frac{4\sqrt{3}}{3}\times\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{2\sqrt{3}}{3}ab\sin C$

由余弦定理得：$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\sqrt{3}}{3}\sin C$

$\because$ 在 ΔABC 中，$C\in(0,\pi)$，$\therefore \tan C=\frac{\sin C}{\cos C}=\sqrt{3}$，则 $C=\frac{\pi}{3}$.

（2）选①②③

在ΔABC中，由余弦定理得：$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，又$\because a=5$，$c=7$，$C=\dfrac{\pi}{3}$

$\therefore \dfrac{1}{2}=\dfrac{25+b^2-49}{2\times 5b}$，$b^2+5b-24=0$，得$b=8$，$b=-3$（舍去）

由正弦定理得：$\dfrac{b}{\sin\angle ABC}=\dfrac{c}{\sin C}$，$\therefore \dfrac{8}{\sin\angle ABC}=\dfrac{7}{\sin\dfrac{\pi}{3}}$，则$\sin\angle ABC=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$

由余弦定理得：$\cos\angle ABC=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{25+49-64}{2\times 5\times 7}=\dfrac{1}{7}$

在ΔABD中，$\cos\angle ADC=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$，$\therefore \sin\angle ADC=\sqrt{1-\cos^2\angle ADC}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$

$\therefore \sin\angle BAD=\sin(\angle ABC-\angle ADC)=\sin\angle ABC\cos\angle ADC-\cos\angle ABC\sin\angle ADC$

$=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}\times\dfrac{\sqrt{21}}{7}-\dfrac{1}{7}\times\dfrac{2\sqrt{7}}{7}=\dfrac{10\sqrt{7}}{49}$

由正弦定理得：$\dfrac{BD}{\sin\angle BAD}=\dfrac{AB}{\sin\angle ADB}$，则$BD=\dfrac{7}{\dfrac{2\sqrt{7}}{7}}\times\dfrac{10\sqrt{7}}{49}=5$.

18．(本小题满分 12 分)

已知等差数列的首项为 2，前 n 项和为 S_n，正项等比数列$\{b_n\}$的首项为 1，且满足，前 n 项和为 $a_3=2b_2$，$S_5=b_2+b_4$.

（1）求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式；

（2）设$c_n=(-1)^n\log_3 S_n+\log_3 b_n$，求数列$\{c_n\}$的前 26 项和.

【解析】

（1）由题意得：$\begin{cases}a_3=2b_2\\ S_5=b_2+b_4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1+2d=2b_1q\\ 5a_1+\dfrac{5\times 4}{2}d=b_1q+b_1q^3\end{cases}$

又$a_1=2$，$b_1=1$，$\therefore q^3-9q=0$，$\because \{b_n\}$是正项等比数列，$\therefore q=3$，则$d=2$

$\therefore a_n=2+2(n-1)=2n$，$b_n=1\cdot 3^{n-1}=3^{n-1}$.

（2）$S_n=\frac{1}{2}n(2+2n)=n(n+1)$，

则$c_n=(-1)^n\log_3[n(n+1)]+\log_3 3^{n-1}=\left[(-1)^n\log_3 n+(-1)^n\log(n+1)\right]+n-1$

$\therefore\{c_n\}$的前 26 项和

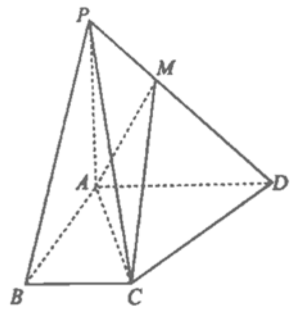
$T_{26}=(-\log_3 1-\log_3 2+0)+(\log_3 2+\log_3 3+1)+(-\log_3 3-\log_3 4+2)+\ldots$

$+\left[-\log_3 25-\log_3 26+24\right]+\left[\log_3 26+\log_3 27+25\right]$

$=-\log_3 1+\log_3 27+\frac{26\times(0+25)}{2}=3+325=328$.

19．(本小题满分 12 分)

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$平面 $ABCD$，$AD\parallel BC$，$\angle BAD=120^\circ$，$AB=AD=2$，点 M 在线段 PD 上，且 $DM=2MP$，$PB\parallel$平面 MAC.



（1）求证：平面 $MAC\perp$平面 PAD；

（2）若 $PA=3$，求平面 PAB 和平面 MAC 所成锐二面角的余弦值.

【解析】

（1）证明：连接BD交AC于点E，连接ME.

$\because PB\parallel$平面MAC，$PB\subset$平面PBD，平面$PBD\cap$平面$MAC=ME$，

$\therefore PB\parallel ME$，$\therefore\frac{DE}{BE}=\frac{DM}{PM}=2$，$\therefore BC=1$，

$\because AB=2$，$\angle ABC=60°$，

$\therefore AC=\sqrt{4+1-2\times 2\times \frac{1}{2}}=\sqrt{3}$，$\therefore AC^2+BC^2=4=AB^2$，$\angle ACB=90°$，

$\therefore \angle CAD=90°$，$CA\perp AD$，又$\because PA\perp$平面$ABCD$，$\therefore PA\perp CA$．

$\because PA\cap AD=A$，$\therefore CA\perp$平面PAD，$\because CA\subset$平面MAC，$\therefore$平面$MAC\perp$平面PAD．

（2）如图建系，则$P(0,0,3)$，$A(0,0,0)$，$B(\sqrt{3},-1,0)$，$C(\sqrt{3},0,0)$，$M\left(0,\frac{2}{3},2\right)$，

$\therefore \overrightarrow{PA}=(0,0,-3)$，$\overrightarrow{AB}=(\sqrt{3},-1,0)$，$\overrightarrow{MA}=\left(0,-\frac{2}{3},-2\right)$，$\overrightarrow{AC}=(\sqrt{3},0,0)$．

设平面PAB和平面MAC的一个法向量分别为$\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，$\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$，

平面PAB与平面MAC所成锐二面角为θ，

$$\therefore \begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{PA}=0\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{AB}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3z_1=0\\ \sqrt{3}x_1-y_1=0\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{n_1}=(1,\sqrt{3},0)$$

$$\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{MA}=0\\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\frac{2}{3}y_2-2z_2=0\\ \sqrt{3}x_2=0\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{n_2}=(0,3,-1)，$$

$$\therefore \cos\theta=\left|\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}\right|=\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{30}}{20}．$$

20.(本小题满分 12 分)

已知某班有 50 位学生，现对该班关于“举办辩论赛”的态度进行调查，，他们综合评价成绩的频数分布以及对“举办辩论赛”的赞成人数如下表：

综合评价成绩（单位：分）	[40，50)	[50，60)	[60，70)	[70，80)	[80，90)	[90，100)
频数	5	10	15	10	5	5
赞成人数	4	8	12	4	3	1

（1）请根据以上统计数据填写下面 2×2 列联表，并回答：是否有 95%的把握认为“综

合评价成绩以 80 分位分界点”对“举办辩论赛”的态度有差异？

	综合评价成绩小于 80 分的人数	综合评价成绩不小于 80 分的人数	合计
赞成			
不赞成			
合计			

（2）若采用分层抽样在综合评价成绩在[60，70)，[70，80)的学生中随机抽取 10 人进行追踪调查，并选其中 3 人担任辩论赛主持人，求担任主持人的 3 人中至少有 1 人在[60，70)的概率．

参考公式：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$ ．

参考数据：

$P(K^2\geq k_0)$	0.10	0.05	0.010	0.005
k_0	2.706	3.841	6.635	7.879

【解析】（1）

	综合评价成绩小于80分的人数	综合评价成绩不小于80分的人数	合计
赞成	28	4	32
不赞成	12	6	18
合计	40	10	50

做个皮尔逊卡方检验的话，有

$$\chi^2=\frac{50\left(28\cdot6-4\cdot12\right)^2}{32\cdot18\cdot40\cdot10}=3.125<3.841=\chi_{0.95}^2(1)$$

故此不能推翻零假设，不能认定成绩和态度有关.

（2）

这样分层抽样，会在$[60,70)$里面抽6个，$[70,80)$里面抽4个，概率即为

$$P=1-P\left(\text{都不是}[60,70)\right)=1-\frac{C_4^3}{C_{10}^3}=\frac{29}{30}$$

21.(本小题满分 12 分)

已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0，b>0\right)$过点点(2，－1)，离心率位$\frac{\sqrt{3}}{2}$，抛物线$y^2=-16x$的准线 l 交 x 轴于点 A，过点 A 作直线交椭圆 C 于 M，N.

（1）求椭圆 C 的标准方程和点 A 的坐标；

（2）若 M 是线段 AN 的中点，求直线 MN 的方程；

（3）设 P，Q 是直线 l 上关于 x 轴对称的两点，问：直线 PM 于 QN 的交点是否在一条定直线上？请说明你的理由.

【解析】

（1）有 $\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1, e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

解得 $a^2=8, b^2=2$，即椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$，

易知准线 l 为 $x=4$，所以 $A(4,0)$；

（2）设 $N(x_0,y_0)$，则 $M(\frac{x_0+4}{2},\frac{y_0}{2})$，

依题意有 $\begin{cases}\frac{x_0^2}{8}+\frac{y_0^2}{2}=1\\ \frac{(x_0+4)^2}{32}+\frac{y_0^2}{8}=1\end{cases}$，解得 $x_0=1, y_0=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$，

所以 $MN: x=\pm\frac{6\sqrt{7}}{7}y+4$

（3）设 $P(4,t), Q(4,-t)$，$MN: x=ky+4$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$

联立 $\begin{cases}x=ky+4\\ x^2+4y^2-8=0\end{cases}$，得 $(k^2+4)y^2+8ky+8=0$，

所以 $\begin{cases}y_1+y_2=-\frac{8k}{k^2+4}\\ y_1y_2=\frac{8}{k^2+4}\end{cases}$，

直线 $PM: y=\frac{y_1-t}{x_1-4}x+\frac{tx_1-4y_1}{x_1-4}$，$QN: y=\frac{y_2+t}{x_2-4}x-\frac{4y_2+tx_2}{x_2-4}$，

交点横坐标为 $x=\frac{2ky_1y_2+4(y_1+y_2)}{y_1+y_2}$，又 $y_1+y_2=-ky_1y_2$，

得 $x=2$，所以 PM 与 QN 的交点恒在直线 $x=2$ 上.

22.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f\left(x\right)=\ln x+\frac{a-e}{x}$，其中 e 是自然对数的底数.

（1）设直线 $y=\dfrac{2}{e}x-2$ 是曲线 $y=f\left(x\right)\left(x>1\right)$ 的一条切线，求 a 的值；

（2）若 $\exists a\in R$，使得 $f\left(x\right)+ma\geq 0$ 对 $\forall x\in\left(0,+\infty\right)$ 恒成立，求实数 m 的取值范围．

【解析】

（1）设切点为 $(x_0,f(x_0))$，其中 $x_0>1$

有 $f'(x_0)=\dfrac{1}{x_0}-\dfrac{a-e}{x_0^2}=\dfrac{2}{e}$ 且 $\ln x_0+\dfrac{2(a-e)}{x_0}-1=-2$

得 $\dfrac{a-e}{x_0}=1-\dfrac{2x_0}{e}$，所以 $\ln x_0+3-\dfrac{4x_0}{e}=0$，易解得 $x_0=e$，则 $a=0$

（2）记 $g(x)=f(x)+ma=\ln x+\dfrac{a-e}{x}+ma$，有 $g'(x)=\dfrac{x-a+e}{x^2}$，

当 $a\leq e$，$0<x<e^{-ma}$ 时，$g(x)<0$，不符合；

当 $a>e$ 时，有 $g(x)_{\min}=g(a-e)=\ln(a-e)+1+ma\geq 0$，

则有 $-m\leq\dfrac{1+\ln(a-e)}{a}$，记 $h(a)=\dfrac{1+\ln(a-e)}{a}(a>e)$，

有 $h'(a)=\dfrac{\dfrac{e}{a-e}-\ln(a-e)}{a^2}$，

易知 $h(a)$ 在 $(e,2e)$ 单调递增，在 $(2e,+\infty)$ 单调递减，

则 $h(a)_{\max}=h(2e)=\dfrac{1}{e}$，所以 $-m\leq\dfrac{1}{e}$，得 $m\geq-\dfrac{1}{e}$．