江苏省仪征中学2020-2021学年度第二学期高二数学

周三练习7 21.4.14

一．单选题（本大题共6小题，共30.0分）

1．若 $A_m^5=2A_m^3$，则 m 的值为（　　）

A. 5　　B. 3　　C. 6　　D. 7

2. 函数 $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$ 的单调减区间为　（　　）

A. $(-\infty,e)$　　B. $(0,e)$　　C. $(1,e)$　　D. $(0,1)$ 和 $(1,e)$

3. 某县从10名大学毕业的选调生中选3个人担任镇长助理，则甲，乙至少有1人入选，而丙没有入选的不同选法的种数是（ ）

A. 28　　B. 49　　C. 56　　D. 85

4．设袋中有80个红球，20个白球，若从袋中任取10个球，则其中恰有6个红球的概率为（ ）

A. $\dfrac{C_{80}^4C_{10}^6}{C_{100}^{10}}$　　B. $\dfrac{C_{80}^6C_{10}^4}{C_{100}^{10}}$　　C. $\dfrac{C_{80}^4C_{20}^6}{C_{100}^{10}}$　　D. $\dfrac{C_{80}^6C_{20}^4}{C_{100}^{10}}$

5．已知函数 $f(x)=ax+1+\dfrac{\ln x}{x}$ 其中 $a\in\mathbf{R}$，若 $f\left(x\right)$ 在定义域上单调递增，则实数 a 的取值范围（　　）

A. $\left[\dfrac{1}{3e^2},+\infty\right)$　　B. $\left[\dfrac{1}{e^3},+\infty\right)$　　C. $\left[\dfrac{1}{2e^3},+\infty\right)$　　D. $\left(-\infty,\dfrac{1}{e^3}\right]$

6．已知函数f(x)是定义在 R 上的偶函数，其导函数 $f'(x)$，若 $f'(x)<f(x)$，$f(x+1)=f(3-x)$，$f(2019)=2$，则不等式 $f(x)<2e^{x-3}$ 的解集为（　　）

A. $(-\infty,e^3)$　　B. $(e^3,+\infty)$　　C. $(-\infty,3)$　　D. $(3,+\infty)$

二．不定项选择题（本大题共2小题，共10分）

7．下列等式中，成立的有（ ）

A. $A_n^m=\dfrac{n!}{m!}$　　B. $C_n^{m-1}+C_n^m=C_{n+1}^m$　　C. $C_n^m=C_n^{n-m}$　　D. $A_n^m=nA_{n-1}^{m-1}$

8．已知函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{e^x-x}$，则下列命题正确的是（　　）

A. $f(x)$ 是奇函数　　B. $|f(x)|>1$

C. $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 单调递增　　D. $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上存在一个极值点

三、填空题（本大题共4小题，共20.0分）

9．已知函数 $f(x)=\tan x$，那么 $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的值为_____.

10．已知$(x^2+\frac{1}{\sqrt{x}})^n$的展开式中第5项与第7项的二项式系数相等，则展开式中常数项为______．

11．班级迎接元旦晚会有3个唱歌节目、2个相声节目和1个魔术节目，要求排出一个节目单．现在临时增加1个魔术节目，要求重新编排节目单，要求2个相声节目不相邻且2个魔术节目也不相邻，有____种排法．

12．设直线l与曲线$C_1: y=e^x$与$C_2: y=-\frac{1}{e^x}$均相切，切点分别为$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$则$y_1y_2=$ ______．

四、解答题（本大题共2小题，共24.0分）

13．用0，1，2，3，4，5这6个数字，可以组成多少个分别符合下列条件且无重复数字的五位数．

(1) 奇数；

(2) 能被25整除的数；

(3) 比12345大且能被5整除的数．

14．已知函数$f(x)=\ln x-ax^2+(a-2)x$．

(Ⅰ) 若$f(x)$在$x=1$处取得极值，求a的值；

(Ⅱ) 求函数$y=f(x)$在$[a^2,a]$上的最大值．

江苏省仪征中学2020-2021学年度第二学期高二数学

周三练习7　　21.4.14

一．选择题（本大题共6小题，共30.0分）

1．若$A_m^5=2A_m^3$，则m的值为（　　）

A. 5　　B. 3　　C. 6　　D. 7

【参考答案】　A

【试题解析】　【分析】

本题考查排列数公式，属于基础题.

利用排列数公式即可求解.

【解答】

解：依题意得$\dfrac{m!}{(m-5)!}=2\times\dfrac{m!}{(m-3)!}$，化简得$(m-3)(m-4)=2$，

解得$m=2$或$m=5$，

又$m\geqslant 5$，$m\in N^*$

$\therefore m=5$，

故选A

2．函数$f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$的单调减区间为　（　　）

A. $(-\infty,e)$　　B. $(0,e)$　　C. $(1,e)$　　D. $(0,1)$和$(1,e)$

【参考答案】　D

【试题解析】　【分析】

本题主要考查利用导数求解函数的单调区间，属于基础题.

由题意令$f'(x)<0$，结合定义域，即可得解.

【解答】

解：依题，欲使函数有意义，只需令$\begin{cases}x>0\\ \ln x\neq 0\end{cases}$，解得$0<x<1$或$x>1$，

则函数定义域为$(0,1)\cup(1,+\infty)$，

对函数求导：$f'(x)=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$，令$f'(x)<0$，

解得$0<x<1$或$1<x<e$，

故函数减区间为$(0,1)$，$(1,e)$.

故选D.

3．某县从10名大学毕业的选调生中选3个人担任镇长助理，则甲，乙至少有1人入选，而丙没有入选的不同选法的种数是（　）

A. 28　　B. 49　　C. 56　　D. 85

【参考答案】　B

【试题解析】

【分析】

本题主要考查排列组合的应用以及分类计数原理，基础题型.

分两种情况，利用排列组合，求解即可.

【解答】
解：甲、乙有 1 人入选，而丙没有入选有：$C_2^1C_7^2=42$ 种；
甲、乙两人都入选，而丙没有入选有：$C_2^2C_7^1=7$ 种，
所以共有 $42+7=49$ 种选法.
故选 B.

4．设袋中有 80 个红球，20 个白球，若从袋中任取 10 个球，则其中恰有 6 个红球的概率为(　)

A. $\dfrac{C_{80}^4C_{10}^6}{C_{100}^{10}}$　　B. $\dfrac{C_{80}^6C_{10}^4}{C_{100}^{10}}$　　C. $\dfrac{C_{80}^4C_{20}^6}{C_{100}^{10}}$　　D. $\dfrac{C_{80}^6C_{20}^4}{C_{100}^{10}}$

【参考答案】 D
【试题解析】 【分析】本题考查有关古典概型的概率问题，关键是正确求出基本事件总数和所求事件包含的基本事件数.试验包含的总事件是袋中有 80 个红球 20 个白球，从袋中任取 10 个球共有 C_{100}^{10} 种不同取法，而满足条件的事件是其中恰有 6 个红球，共有 $C_{80}^6C_{20}^4$ 种取法，根据古典概型公式得到结果. 【解答】解：本题是一个古典概型，
$\because$ 袋中有 80 个红球 20 个白球，
若从袋中任取 10 个球共有 C_{100}^{10} 种不同取法，
而满足条件的事件是其中恰有 6 个红球，共有 $C_{80}^6C_{20}^4$ 种取法，
由古典概型公式得到 $P=\dfrac{C_{80}^6C_{20}^4}{C_{100}^{10}}$，
故选 D.

5．已知函数 $f(x)=ax+1+\dfrac{\ln x}{x}$ 其中 $a\in\mathbf{R}$，若 $f(x)$ 在定义域上单调递增，则实数 a 的取值范围(　　)

A. $\left[\dfrac{1}{3e^2},+\infty\right)$　　B. $\left[\dfrac{1}{e^3},+\infty\right)$　　C. $\left[\dfrac{1}{2e^3},+\infty\right)$　　D. $\left(-\infty,\dfrac{1}{e^3}\right]$

【参考答案】 C
【试题解析】 【分析】
本题考查利用导数研究函数的单调性，恒成立问题，属于中档题.
$f(x)$ 的定义域上单调递增，即 $f'(x)\geqslant 0$ 对于定义域中的 x 都成立，再利用参变分离和恒成立思想，将问题转化为求函数 $\dfrac{\ln x-1}{x^2}$ 的最大值.
【解答】
解：因为 $f(x)=ax+1+\dfrac{\ln x}{x}$，定义域为 $(0,+\infty)$，
且 $f'(x)=a+\dfrac{1-\ln x}{x^2}=\dfrac{ax^2-\ln x+1}{x^2}$，
依题意可得 $f'(x)\geqslant 0$，$\forall x>0$，即 $ax^2-\ln x+1\geqslant 0$，$\forall x>0$，
$\therefore a\geqslant\dfrac{\ln x-1}{x^2}$，

令 $h(x)=\dfrac{\ln x-1}{x^2}$，则 $h'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x^2-2x(\ln x-1)}{x^4}=\dfrac{3-2\ln x}{x^3}=0$ 有根，令 $x_0=e^{\frac{3}{2}}$，

当 $x\in(0,x_0)$，$h'(x)>0$，函数 $h(x)$ 单调递增;
当 $x\in(x_0,+\infty)$，$h'(x)<0$，函数 $h(x)$ 单调递减，
$\therefore h(x)$ 在 $x_0=e^{\frac{3}{2}}$ 处取得最大值，

$\therefore a \geqslant h(x)_{\max} = h(x_0) = \dfrac{1}{2e^3}$，即 $a \in [\dfrac{1}{2e^3}, +\infty)$.

故选 C.

6. 已知函数 $\mathbf{f(x)}$ 是定义在 R 上的偶函数，其导函数 $f'(x)$，若 $f'(x) < f(x)$，$f(x+1) = f(3-x)$，$f(2019) = 2$，则不等式 $f(x) < 2e^{x-3}$ 的解集为（　）

A. $(-\infty, e^3)$　　B. $(e^3, +\infty)$　　C. $(-\infty, 3)$　　D. $(3, +\infty)$

【参考答案】 D

【试题解析】

【分析】

本题主要考查不等式的求解，根据函数奇偶性和周期性以及利用导数研究函数的单调性是解决本题的关键·根据函数的奇偶性和单调性推导函数的周期性，构造函数 $g(x)$，求函数的导数，研究函数的单调性即可得到结论.

【解答】

解：$\because$ 函数 $f(x)$ 是偶函数，

$f(x+1) = f(3-x) = f(x-3)$，

$\therefore f(x+4) = f(x)$，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 是周期为 4 的函数，

$\therefore f(2019) = f(-1) = f(3) = 2$，

$\therefore f(3) = 2$，

$\because$ 设 $g(x) = \dfrac{f(x)}{e^x}$，

$\therefore g'(x) = \dfrac{f'(x)e^x - f(x)e^x}{(e^x)^2} = \dfrac{f'(x) - f(x)}{e^x} < 0$，

$\therefore$ 函数 $g(x)$ 是 R 上的减函数，

$\because$ 不等式 $f(x) < 2e^{x-3}$，

$\therefore \dfrac{f(x)}{e^x} < \dfrac{2}{e^3}$，

$\therefore g(x) < g(3)$，

$\therefore x > 3$，

$\therefore$ 不等式 $f(x) < 2e^{x-3}$ 的解集为 $(3, +\infty)$.

故选 D.

二．不定项选择题（本大题共 2 小题，共 10 分）

7. 下列等式中，成立的有(　)

A. $A_n^m = \dfrac{n!}{m!}$　　B. $C_n^{m-1} + C_n^m = C_{n+1}^m$　　C. $C_n^m = C_n^{n-m}$　　D. $A_n^m = nA_{n-1}^{m-1}$

【参考答案】 BCD

【试题解析】 【分析】

本题考查排列数、组合数公式，属于中档题.

根据公式直接验证选项即可.

【解答】

解：对于 A，$\because A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = \dfrac{n!}{(n-m)!}$，$\therefore$A 错误；

对于 B，$\because C_n^{m-1} + C_n^m = \dfrac{n!}{(m-1)!(n-m+1)!} + \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$

$=\dfrac{m\cdot(n!)+(n!)(n-m+1)}{m!(n-m+1)!}=\dfrac{(n+1)!}{m!(n-m+1)!}=C_n^{m+1}$， $\therefore$B 正确；

对于C，$\because C_n^{n-m}=\dfrac{n!}{(n-m)!\cdot[n-(n-m)]!}=\dfrac{n!}{(n-m)!\cdot m!}=C_n^m$， $\therefore C$ 正确；

对于D，$\because nA_{n-1}^{m-1}=n\cdot(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot[(n-1)-(m-1)+1]$

$=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)=A_n^m$，$\therefore D$ 正确.

故选：BCD.

8．已知函数$f(x)=\dfrac{\sin x}{e^x-x}$，则下列命题正确的是（　　）

A. $f(x)$是奇函数　　　　B. $|f(x)|>1$

C. $f(x)$在$(-1,0)$单调递增　　　　D. $f(x)$在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上存在一个极值点

【参考答案】 CD

【试题解析】 【分析】

本题考查导数的综合应用，极值，函数的性质，属于较难题.

利用奇偶性的定义可判断A是否正确；根据$e^x-x\geqslant 1$，$|\sin x|\leqslant 1$可判断B是否正确；利用二次求导可判断CD是否正确.

【解答】

解：对于选项A：函数$f(x)=\dfrac{\sin x}{e^x-x}$，令$g(x)=e^x-x$，$g'(x)=e^{x-1}$，

令$g'(x)=0$，得$x=0$，当$x>0$时，$g'(x)>0$，当$x<0$时，$g'(x)<0$，

所以$g(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减，在$(0,+\infty)$上单调递增，

所以$g(x)\geqslant g(0)=1$，所以$f(x)$的定义域为R，

又$f(-x)=\dfrac{-\sin x}{e^{-x}+x}\neq-f(x)$，所以$f(x)$不是奇函数，故A错误；

对于选项B：因为$g(x)=e^x-x\geqslant 1$，所以$0<\dfrac{1}{e^x-x}\leqslant 1$，$|\sin x|\leqslant 1$，所以$|f(x)|\leqslant 1$，

当$\dfrac{1}{e^x-x}=1$时，$x=0$，此时$\sin x=0$，所以$|f(x)|$不存在等于1的情况，所以$|f(x)|<1$，故B错误；

对于选项C：$f'(x)=\dfrac{\cos x(e^x-x)-\sin x(e^x-1)}{(e^x-x)^2}$，

当$x\in(-1,0)$ 时，$\cos x>0$，$e^x-x>0$，$\sin<0$，

所以$f(x)=\dfrac{\sin x}{e^x-x}$在$(-1,0)$单调递增， 故C正确；

对于选项D：$f'(x)=\dfrac{e^x(\cos\ x-\sin\ x)-x\cos\ x+\sin\ x}{(e^x-x)^2}$，

令$h\left(x\right)=e^x(\cos x-\sin x)-x\cos x+\sin x$，

$h'(x)=\sin x(x-2e^x)$，

令$\phi(x)=x-2e^x$，

因为$\phi'(x)=1-2e^x$单调递减，

所以$\phi'(x)<\phi'(0)=1<0$，

故$\phi(x)$在$[0,\dfrac{\pi}{2}]$上单调递减，

所以 $\phi(x)\leqslant\phi(0)=-2<0$，

所以 $h'(x)<0$，故 $h(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上单调递减，

所以 $h(0)=1>0$， $h(\dfrac{\pi}{2})=1-e^{\frac{\pi}{2}}<0$，

所以存在 $x_0\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，使得 $h(x_0)=0$，即 $f'(x_0)=0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递增， $(x_0,\dfrac{\pi}{2})$ 上单调递减，

所以 $f(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上存在一个极值点，故 D 正确.

故选 CD.

三、填空题（本大题共 4 小题，共 20.0 分）

9. 已知函数 $f(x)=\tan x$，那么 $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的值为_____.

【参考答案】 2

【试题解析】

【分析】

本题考查导数的运算，同角三角函数的基本关系，属于基础题.

由 $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$，进而通过计算得出 $f'(x)$，由此即可求出结果.

【解答】

解：因为 $f(x)=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$，

所以 $f'(x)=(\dfrac{\sin x}{\cos x})'=\dfrac{cos^2x+\sin^2x}{cos^2x}=\dfrac{1}{cos^2x}$，

所以 $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{\pi}{4}}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{2}}=2$.

故答案为 2.

10. 已知 $(x^2+\dfrac{1}{\sqrt{x}})^n$ 的展开式中第 5 项与第 7 项的二项式系数相等，则展开式中常数项为______.

【参考答案】 45

【试题解析】 【分析】

本题考查二项展开式的特定项与特定项的系数的求解，属于基础题.

写出展开式的通项公式，令第 7 项和第 5 项的系数相同，算出 n 的值，以此算出常数项.

【解答】

解：因为 $(x^2+\dfrac{1}{\sqrt{x}})^n$ 的展开式的通项公式为：

$T_{r+1}=C_n^r\cdot(x^2)^{n-r}\cdot(\dfrac{1}{\sqrt{x}})^r=C_n^rx^{2n-\frac{5}{2}r}$，

根据题意第 7 项和第 5 项的二项式系数相等，

则 $n=10$，

令 $2\times10-\dfrac{5}{2}r=0\Rightarrow r=8$，

所以常数项为$C_{10}^{8}=C_{10}^{2}=45$．

故答案为：45．

11．班级迎接元旦晚会有3个唱歌节目、2个相声节目和1个魔术节目，要求排出一个节目单．现在临时增加1个魔术节目，要求重新编排节目单，要求2个相声节目不相邻且2个魔术节目也不相邻，有_____种排法？

【参考答案】解：若2个相声节目相邻，则有 $A_2^2A_6^6$种不同排法，若2个魔术节目相邻，也有 $A_2^2A_6^6$种不同排法，

若2个相声节目相邻，并且2个魔术节目也相邻，则有 $A_2^2A_2^2A_5^5$种不同排法，

则2个相声节目不相邻且2个魔术节目也不相邻，可由7个节目的全排列减去2个相声节目相邻的排列数和2个魔术节目相邻的排列数，再加上2个相声节目相邻并且2个魔术节目也相邻的排列数，

所以共有 $A_7^7-2A_2^2A_6^6+A_2^2A_2^2A_5^5=A_5^5(42-24+4)=2640$种不同排法.

12．设直线l与曲线$C_1:y=e^x$与$C_2:y=-\dfrac{1}{e^x}$均相切，切点分别为$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$则$y_1y_2=$ ______

【参考答案】 $-e^2$

【试题解析】

【分析】

本题主要考查了导数的几何意义，考查了运算求解能力，属于基础题.

对C_1：$y=e^x$和曲线$C_2:y=-\dfrac{1}{e^x}$求导可得：$y'=e^x$，$y'=\dfrac{1}{e^x}$，由题意可得$e^{x_1}=\dfrac{1}{e^{x_2}}$，又 $\dfrac{-\dfrac{1}{e^{x_2}}-e^{x_1}}{x_2-x_1}=e^{x_1}=\dfrac{1}{e^{x_2}}$，可得：

$x_1=x_2+2$，由此可得答案.

【解答】

解：对C_1：$y=e^x$和曲线$C_2:y=-\dfrac{1}{e^x}$求导可得：$y'=e^x$，$y'=\dfrac{1}{e^x}$.

由题意可得$e^{x_1}=\dfrac{1}{e^{x_2}}$，

另一方面：$\dfrac{-\dfrac{1}{e^{x_2}}-e^{x_1}}{x_2-x_1}=e^{x_1}=\dfrac{1}{e^{x_2}}$.

可得：$x_1=x_2+2$.

又$y_1=e^{x_1},y_2=-\dfrac{1}{e^{x_2}}$.

$\therefore y_1y_2=e^{x_1}\times(-\dfrac{1}{e^{x_2}})=-e^{x_2+2}\cdot\dfrac{1}{e^{x_2}}=-e^2$.

故答案为：$-e^2$.

四、解答题（本大题共2小题，共24.0分）

13．用0，1，2，3，4，5这6个数字，可以组成多少个分别符合下列条件且无重复数字的五位数.

(1) 奇数；

(2) 能被25整除的数；

(3) 比12345大且能被5整除的数.

【参考答案】

解：(1) 先排末位，有3种方法；再排首位，有4种方法；中间有A_4^3种方法，故共有$3\times4\times\mathrm{A}_4^3=288$(个)奇数.

(2) 末两位数字为50的有A_4^3个，末两位数字为25的有$3\times A_3^2$个，共有$A_4^3+3A_3^2=42$(个)能被25整除的数.

(3) 对满足条件的数分末位为0和5两类考察，

末位为0的分以下情况讨论：

首位大于1，有$4A_4^3=96$种；首位为1，第二位大于2，有$3A_3^2=18$种；首位为1，第二位为2，第三位大于3，有$2A_2^1=4$种；首位为1，第二位为2，第三位为3，第四位大于4，有1种，共有119个，

末位为5的同理共有$3A_4^3+2A_3^2+2=86$个，

共有205个比12345大且能被5整除的数.

14．已知函数$f(x)=\ln x-ax^2+(a-2)x$．

（Ⅰ）若$f(x)$在$x=1$处取得极值，求a的值；

（Ⅱ）求函数$y=f(x)$在$[a^2,a]$上的最大值.

【参考答案】 解：（Ⅰ）$\because f(x)=\ln x-ax^2+(a-2)x$，$\therefore$函数的定义域为$(0,+\infty)$.

$\therefore f'(x)=\dfrac{1}{x}-2ax+(a-2)=\dfrac{1-2ax^2+(a-2)x}{x}=\dfrac{-(2x-1)(ax+1)}{x}$.

$\because f(x)$在$x=1$处取得极值，

即$f'(1)=-(2-1)(a+1)=0$，

$\therefore a=-1$.

当$a=-1$时，在$(\dfrac{1}{2},1)$内$f'(x)<0$，在$(1,+\infty)$内$f'(x)>0$，

$\therefore x=1$是函数$y=f(x)$的极小值点．$\therefore a=-1$.

（Ⅱ）$\because a^2<a$，$\therefore 0<a<1$.　　　　$f'(x)=\dfrac{1}{x}-2ax+(a-2)$

$=\dfrac{1-2ax^2+(a-2)x}{x}=-\dfrac{(2x-1)(ax+1)}{x}$

$\because x\in(0,+\infty)$，$\therefore ax+1>0$，

$\therefore f(x)$在$(0,\dfrac{1}{2})$上单调递增；在$(\dfrac{1}{2},+\infty)$上单调递减，

①当$0<a\leqslant\dfrac{1}{2}$时，$f(x)$在$[a^2,a]$单调递增，

$\therefore f_{\max}(x)=f(a)=\ln a-a^3+a^2-2a$；

②当$\begin{cases}a>\dfrac{1}{2}\\a^2<\dfrac{1}{2}\end{cases}$，即$\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时，$f(x)$在$(a^2,\dfrac{1}{2})$单调递增，在$(\dfrac{1}{2},a)$单调递减，

$\therefore f_{\max}(x)=f(\dfrac{1}{2})=-\ln 2-\dfrac{a}{4}+\dfrac{a-2}{2}=\dfrac{a}{4}-1-\ln 2$；

③当$\dfrac{1}{2}\leqslant a^2$，即$\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leqslant a<1$时，$f(x)$在$[a^2,a]$单调递减，

$\therefore f_{\max}(x)=f(a^2)=2\ln a-a^5+a^3-2a^2$.

综上所述，当$0<a\leqslant\dfrac{1}{2}$时，函数$y=f(x)$在$[a^2,a]$上的最大值是$\ln a-a^3+a^2-2a$；

当$\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时，函数$y=f(x)$在$[a^2,a]$上的最大值是$\dfrac{a}{4}-1-\ln 2$；

当$1>a\geqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时，函数$y=f(x)$在$[a^2,a]$上的最大值是$2\ln a-a^5+a^3-2a^2$.