

高一数学小练 (23)

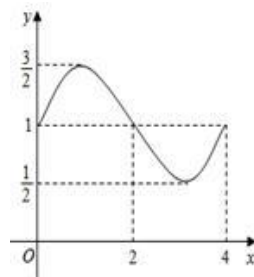
姓名: _____ 班级: _____ 学号: _____

一、选择题 (本大题共 6 小题, 共 30.0 分)

1. 已知全集 $U=R$, $A=\{x|x \leq 0\}$, $B=\{x|x \geq 1\}$, 则集合 $C_U(A \cup B) = (\quad)$
 A. $\{x|x \geq 0\}$ B. $\{x|x \leq 1\}$ C. $\{x|0 \leq x \leq 1\}$ D. $\{x|0 < x < 1\}$

2. 函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi) + b$ 的部分图像如图, 则 $f(2017) = (\quad)$

- A. 1 B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{3}{4}$



3. 设 $\tan(\pi + \alpha) = 2$, 则 $\frac{\sin(\alpha - \pi) + \cos(\pi - \alpha)}{\sin(\pi + \alpha) - \cos(\pi + \alpha)} = (\quad)$

- A. 3 B. $\frac{1}{3}$ C. 1 D. -1

4. 已知 θ 是第二象限角, $P(x, 2)$ 为其终边上一点且 $\cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}x$, 则 $\frac{2\sin\theta - \cos\theta}{\sin\theta + \cos\theta}$ 的值()

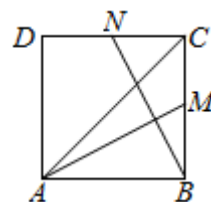
- A. 5 B. $\frac{5}{2}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{3}{4}$

5. 已知向量 $\vec{a} = (8, \frac{1}{2}x)$, $\vec{b} = (x, 1)$, 其中 $x > 0$, 若 $(\vec{a} - 2\vec{b}) \parallel (2\vec{a} + \vec{b})$, 则 x 的值是 ()

- A. 4 B. 8 C. 0 D. 2

6. 如图, 正方形 $ABCD$ 中, M 、 N 分别是 BC 、 CD 的中点, 若 $\vec{AC} = \lambda \vec{AM} + \mu \vec{BN}$, 则 $\lambda + \mu = (\quad)$

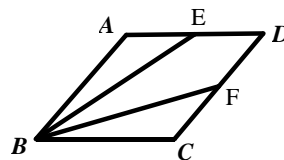
- A. 2 B. $\frac{8}{3}$ C. $\frac{6}{5}$ D. $\frac{8}{5}$



二、填空题 (本大题共 3 小题, 共 15.0 分)

7. 已知 $\vec{a} = (x+1, 2)$, $\vec{b} = (4, -7)$, 且 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角为钝角, 则 x 的取值范围为_____.

8. 如图, 菱形 $ABCD$ 的边长为 1, $\angle ABC = 60^\circ$, E 、 F 分别为 AD 、 CD 的中点, 则 $\vec{BE} \cdot \vec{BF} =$ _____



第 8 题

9. 对于函数 $f(x) = 3\sin(2x + \frac{\pi}{6})$, 给出下列命题:

- ① 图象关于原点成中心对称; ② 图象关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称;
 ③ 函数 $f(x)$ 的最大值是 3; ④ 函数在区间 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 上单调递增.

其中所有正确命题的序号为_____.

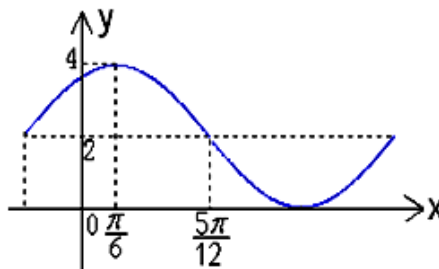
三、解答题（本大题共 3 小题，共 36.0 分）

10. 函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi) + B$ 的一部分图象如图所示，其中 $A > 0$, $\omega > 0$, $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$.

(1) 求函数 $y=f(x)$ 解析式;

(2) 求 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时, 函数 $y=f(x)$ 的值域;

(3) 将函数 $y=f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度, 得到函数 $y=g(x)$ 的图象, 求函数 $y=g(x)$ 的单调递减区间.



11. 已知 $\vec{a} = (3, 4)$, $\vec{b} = (2, k)$.

(1) 若 $(\vec{a} + 2\vec{b}) \parallel (\vec{a} - \vec{b})$, 求 k 的值.

(2) 若 $(\vec{a} + \vec{b}) \perp (\vec{a} - \vec{b})$, 求 k 的值.

12. 已知函数 $f(x) = \lg(2+x) + \lg(2-x)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的定义域;

(2) 记函数 $g(x) = 10^{f(x)} + 3x$, 求函数 $g(x)$ 的值域;

(3) 若不等式 $f(x) > m$ 有解, 求实数 m 的取值范围.

答案和解析

1. 【答案】D

【解析】

解: $A \cup B = \{x | x \geq 1 \text{ 或 } x \leq 0\}$,

$\therefore C_U(A \cup B) = \{x | 0 < x < 1\}$,

故选: D.

先求 $A \cup B$, 再根据补集的定义求 $C_U(A \cup B)$.

本题考查了集合的并集、补集运算, 利用数轴进行数集交、并、补运算是常用方法.

2. 【答案】B

【解析】

【分析】

本题主要考查已知函数的图象求三角函数的解析式.

【解答】

解: 观察图象可知, $A = \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2}$, $T = 4$, $b = 1$,

所以 $\omega = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$,

所以 $f(0) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} \times 0 + \varphi\right) + 1 = 1$, 解得 $\sin\varphi = 0$,

所以 $\cos\varphi = 1$,

所以 $f(2017) = f(504 \times 4 + 1) = f(1) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) + 1 = \frac{1}{2} \cos\varphi + 1 = \frac{3}{2}$,

故选 B.

3. 【答案】A

【解析】

解: 由 $\tan(\pi + \alpha) = 2$, 得 $\tan\alpha = 2$,

则 $\frac{\sin(\alpha - \pi) + \cos(\pi - \alpha)}{\sin(\pi + \alpha) - \cos(\pi + \alpha)} = \frac{-\sin\alpha - \cos\alpha}{-\sin\alpha - (-\cos\alpha)} = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} = \frac{\tan\alpha + 1}{\tan\alpha - 1} = 3$.

故选 A.

由 $\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$ 及正余弦诱导公式把要求代数式转化为 $\tan\alpha$ 的代数式即可.

本题考查诱导公式及化归思想.

4. 【答案】A

【解析】

解: $\because \theta$ 是第二象限角, $P(x, 2)$ 为其终边上一点,

$$\therefore |OP| = \sqrt{x^2+4},$$

$$\text{则 } \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{\sqrt{5}}{5}x, \text{ 即 } x=-1.$$

$$\therefore \tan\theta = -2.$$

$$\text{则 } \frac{2\sin\theta - \cos\theta}{\sin\theta + \cos\theta} = \frac{2\tan\theta - 1}{\tan\theta + 1} = \frac{-4-1}{-1} = 5.$$

故选: A.

由已知结合任意角的三角函数定义求得 x , 进一步得到 $\tan\theta$, 化弦为切得答案.

本题考查任意角的三角函数的定义, 考查同角三角函数基本关系式的应用,

是基础题.

5. 【答案】A

【解析】

$$\text{解: } \because \text{向量 } \vec{a} = (8, \frac{1}{2}x), \vec{b} = (x, 1),$$

$$\therefore \vec{a} - 2\vec{b} = (8-2x, \frac{1}{2}x-2), 2\vec{a} + \vec{b} = (16+x, x+1)$$

$$\because (\vec{a} - 2\vec{b}) \parallel (2\vec{a} + \vec{b}),$$

$$\therefore (8-2x)(x+1) - (16+x)(\frac{1}{2}x-2) = 0$$

$$\text{即 } -\frac{5}{2}x^2 + 40 = 0$$

又因 $x > 0$

$$\therefore x=4$$

故选 A.

根据平面向量的坐标运算公式求出向量 $\vec{a} - 2\vec{b}$ 与 $2\vec{a} + \vec{b}$, 然后根据平面向

量共线(平行)的充要条件建立等式, 解之即可.

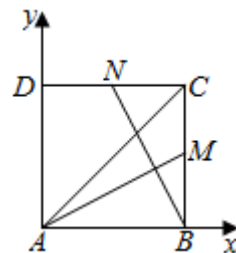
本题主要考查了平面向量的坐标运算, 以及平面向量共线(平行)的坐标表示,

同时考查了计算能力, 属于基础题.

6. 【答案】D

【解析】

解:以 AB, AD 为坐标轴建立平面直角坐标系, 如图:



设正方形边长为 1, 则 $\overrightarrow{AM} = (1, \frac{1}{2})$, $\overrightarrow{BN} = (-\frac{1}{2}, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (1, 1)$.

$\therefore \overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AM} + \mu \overrightarrow{BN}$,

$$\therefore \begin{cases} \lambda - \frac{1}{2}\mu = 1 \\ \frac{1}{2}\lambda + \mu = 1 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} \lambda = \frac{6}{5} \\ \mu = \frac{2}{5} \end{cases}.$$

$$\therefore \lambda + \mu = \frac{8}{5}.$$

故选:D.

建立平面直角坐标系, 使用坐标进行计算, 列方程组解出 λ, μ .

本题考查了平面向量的基本定理, 属于基础题.

7. 【答案】 $x < \frac{5}{2}$ 且 $x \neq -\frac{15}{7}$

【解析】

解:若 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 则 $8+7(x+1)=0$, $\therefore x = -\frac{15}{7}$,

$\therefore \vec{a}$ 与 \vec{b} 的夹角为钝角,

$$\therefore x \neq -\frac{15}{7}.$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4(x+1) - 14 = 4x - 10,$$

$\therefore \vec{a}$ 与 \vec{b} 的夹角为钝角,

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} < 0, \text{即 } 4x - 10 < 0,$$

$$\therefore x < \frac{5}{2},$$

故答案为 $x < \frac{5}{2}$ 且 $x \neq -\frac{15}{7}$.

令 $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ 即可解出 x 的范围, 再排除掉 \vec{a}, \vec{b} 共线的情况即可.

本题考查了平面向量的数量积及夹角计算, 属于基础题.

8. 【答案】 $\frac{13}{8}$

9. 【答案】②③

【解析】

解:对于函数 $f(x)=3\sin(2x+\frac{\pi}{6})$,

由于它不是奇函数,故它的图象不关于原点成中心对称,故排除①;

由于当 $x=\frac{\pi}{6}$ 时, $f(x)=3$, 为函数 $f(x)$ 的最大值,故它的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 对称,故②满足条件;

根据函数 $f(x)=3\sin(2x+\frac{\pi}{6})$ 的最大值为 3,故③满足条件;

由于在区间 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 上, $2x+\frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$,

故函数 $f(x)=3\sin(2x+\frac{\pi}{6})$ 在区间 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 上不是单调递增的,故④错误,

故答案为:②③.

由条件利用正弦函数的图象和性质,得出结论.

本题主要考查正弦函数的图象和性质,属于基础题.

10.【答案】解:(1)根据函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\phi)+B$ 的一部分图象,其中 $A>0$, $\omega>0$, $|\phi|<\frac{\pi}{2}$,

可得 $A=4-2=2$, $B=2$, $\frac{T}{4}=\frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi}{\omega}=\frac{5\pi}{12}$, $\therefore \omega=2$.

再根据五点法作图,可得 $2 \cdot \frac{\pi}{6}+\phi=\frac{\pi}{2}$, $\therefore \phi=\frac{\pi}{6}$, $\therefore f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})+2$.

(2) $\because x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\therefore 2x+\frac{\pi}{6} \in [\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}]$, $\therefore \sin(2x+\frac{\pi}{6}) \in [-\frac{1}{2}, 1]$, $\therefore y=f(x) \in [1, 4]$.

(3)将函数 $y=f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度,得到函数 $y=g(x)=2\sin[2(x-\frac{\pi}{4})+\frac{\pi}{6}]+2=2\sin(2x-\frac{\pi}{3})+2$ 的图象,

对于函数 $y=g(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{3})+2$, 令 $2k\pi+\frac{\pi}{2} \leq 2x-\frac{\pi}{3} \leq 2k\pi+\frac{3\pi}{2}$, 求得 $k\pi+\frac{5\pi}{12} \leq x \leq k\pi+\frac{11\pi}{12}$,

故函数 $g(x)$ 的单调减区间为 $[k\pi+\frac{5\pi}{12}, k\pi+\frac{11\pi}{12}]$, $k \in \mathbb{Z}$.

【解析】

(1)由函数的图象的顶点坐标求出 A , 由周期求出 ω , 由五点法作图求出 ϕ 的值, 可得函数的解析式.

(2)利用正弦函数的定义域和值域, 求得 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时, 函数 $y=f(x)$ 的值域.

(3)利用正弦函数的单调性, 求得函数 $y=g(x)$ 的单调递减区间.

本题主要考查由函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的部分图象求解析式, 由函数的图象的顶点坐标求出 A , 由周期求出 ω , 由五点法作图求出 φ 的值. 还考查了正弦函数的定义域和值域, 正弦函数的单调性, 属于中档题.

11. 【答案】解: $\vec{a}=(3, 4)$, $\vec{b}=(2, k)$.

$$(1) \vec{a}+2\vec{b}=(7, 4+2k), \vec{a}-\vec{b}=(1, 4-k),$$

$$(\vec{a}+2\vec{b}) \parallel (\vec{a}-\vec{b}),$$

$$\text{可得: } 28-7k=4+2k,$$

$$\text{解得 } k=\frac{8}{3}.$$

$$(2) \vec{a}+\vec{b}=(5, 4+k).$$

$$\vec{a}-\vec{b}=(1, 4-k),$$

$$(\vec{a}+\vec{b}) \perp (\vec{a}-\vec{b}),$$

$$\text{可得: } 5+16-k^2=0,$$

$$\text{解得 } k=\pm\sqrt{21}.$$

【解析】

利用向量的共线与垂直的充要条件列出方程求解即可.

本题考查向量共线与垂直的充要条件的应用, 考查计算能力.

$$12. \text{解: (1) } x \text{ 须满足 } \begin{cases} 2+x > 0 \\ 2-x > 0 \end{cases}, \quad \therefore -2 < x < 2, \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{所求函数的定义域为 } (-2, 2) \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

说明: 如果直接由 $f(x)=\lg(4-x^2)$, $4-x^2 > 0$ 得到定义域 $(-2, 2)$, 不得分. 但不再影响后两小题的得分.

$$(2) \text{ 由于 } -2 < x < 2, \therefore f(x)=\lg(4-x^2), \text{ 而 } g(x)=10^{f(x)}+3x,$$

$$\therefore \text{函数 } g(x)=-x^2+3x+4 \quad (-2 < x < 2), \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{其图象的对称轴为 } x=\frac{3}{2}, \therefore \text{而 } g\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{25}{4}, g(-2)=-6,$$

$$\text{所以所求函数的值域是 } \left(-6, \frac{25}{4}\right] \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$(3) \therefore \text{不等式 } f(x) > m \text{ 有解, } \therefore m < f(x)_{\max} \quad \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$

$$\text{令 } t=4-x^2, \text{ 由于 } -2 < x < 2, \therefore 0 < t \leq 4$$

$$\therefore f(x) \text{ 的最大值为 } \lg 4.$$

$$\therefore \text{实数 } m \text{ 的取值范围为 } m < \lg 4 \quad \dots\dots\dots 15 \text{ 分}$$

说明: 也可以结合 $f(x)$ 的是偶函数和单调性, 求得 $f(x)$ 的最大值, 参照给分.