用不动点法求数列的通项

定义：方程 $f(x)=x$ 的根称为函数 $f(x)$ 的不动点.

利用递推数列 $f(x)$ 的不动点，可将某些递推关系 $a_n = f(a_{n-1})$ 所确定的数列化为等比数列或较易求通项的数列，这种方法称为不动点法.

定理 1：若 $f(x)=ax+b(a\neq 0,a\neq 1)$, p 是 $f(x)$ 的不动点，a_n 满足递推关系 $a_n = f(a_{n-1}),(n>1)$，则 $a_n-p=a(a_{n-1}-p)$，即 $\{a_n-p\}$ 是公比为 a 的等比数列.

证明：因为 p 是 $f(x)$ 的不动点

$\therefore ap+b=p$

$\therefore b-p=-ap$ 由 $a_n=a\cdot a_{n-1}+b$ 得 $a_n-p=a\cdot a_{n-1}+b-p=a(a_{n-1}-p)$

所以 $\{a_n-p\}$ 是公比为 a 的等比数列.

定理 2：设 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}(c\neq 0,ad-bc\neq 0)$，$\{a_n\}$ 满足递推关系 $a_n = f(a_{n-1}),n>1$，初值条件 $a_1\neq f(a_1)$

（1）：若 $f(x)$ 有两个相异的不动点 p,q，则 $\dfrac{a_n-p}{a_n-q}=k\cdot\dfrac{a_{n-1}-p}{a_{n-1}-q}$ （这里 $k=\dfrac{a-pc}{a-qc}$）

（2）：若 $f(x)$ 只有唯一不动点 p，则 $\dfrac{1}{a_n-p}=\dfrac{1}{a_{n-1}-p}+k$ （这里 $k=\dfrac{2c}{a+d}$）

证明：由 $f(x)=x$ 得 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}=x$，所以 $cx^2+(d-a)x-b=0$

（1）因为 p,q 是不动点，所以 $\begin{cases} cp^2+(d-a)p-b=0 \\ cq^2+(d-a)q-b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=\dfrac{pd-b}{a-pc} \\ q=\dfrac{qd-b}{a-qc} \end{cases}$，所以

$$\frac{a_n-p}{a_n-q}=\frac{\dfrac{aa_{n-1}+b}{ca_{n-1}+d}-p}{\dfrac{aa_{n-1}+b}{ca_{n-1}+d}-q}=\frac{(a-pc)a_{n-1}+b-pd}{(a-qc)a_{n-1}+b-qd}=\frac{a-pc}{a-qc}\cdot\frac{a_{n-1}-\dfrac{pd-b}{a-pc}}{a_{n-1}-\dfrac{qd-b}{a-qc}}=\frac{a-pc}{a-qc}\cdot\frac{a_{n-1}-p}{a_{n-1}-q}$$

令 $k=\dfrac{a-pc}{a-qc}$，则 $\dfrac{a_n-p}{a_n-q}=k\dfrac{a_{n-1}-p}{a_{n-1}-q}$

（2）因为 p 是方程 $cx^2+(d-a)x-b=0$ 的唯一解，所以 $cp^2+(d-a)p-b=0$

所以 $b-pd=cp^2-ap$， $p=\frac{a-d}{2c}$ 所以

$$a_n-p=\frac{aa_{n-1}+b}{ca_{n-1}+d}-p=\frac{(a-cp)a_{n-1}+b-pd}{ca_{n-1}+d}=\frac{(a-cp)a_{n-1}+cp^2-ap}{ca_{n-1}+d}=\frac{(a-cp)(a_{n-1}-p)}{ca_{n-1}+d}$$

所以

$$\frac{1}{a_n-p}=\frac{1}{a-cp}\cdot\frac{ca_{n-1}+d}{a_{n-1}-p}=\frac{1}{a-cp}\cdot\frac{c(a_{n-1}-p)+d+cp}{a_{n-1}-p}=\frac{c}{a-cp}+\frac{d+cp}{a-cp}\cdot\frac{1}{a_{n-1}-p}=\frac{1}{a_{n-1}-p}+\frac{2c}{a+d}$$

令 $k=\frac{2c}{a+d}$，则 $\frac{1}{a_n-p}=\frac{1}{a_{n-1}-p}+k$

例 1： 设 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1,a_{n+1}=\frac{a_n+2}{a_n},n\in N^*$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式

解： 作函数 $f(x)=\frac{x+2}{x}$，解方程 $f(x)=x$ 求出不动点 $p=2,q=-1$，于是

$\frac{a_{n+1}-2}{a_{n+1}+1}=\frac{a_n+2-2a_n}{a_n+2+a_n}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{a_n-2}{a_n+1}$，逐次迭代得 $\frac{a_n-2}{a_n+1}=(-\frac{1}{2})^{n-1}\cdot\frac{a_1-2}{a_1+1}=(-\frac{1}{2})^n$

由此解得 $a_n=\frac{2^{n+1}+(-1)^n}{2^n-(-1)^n}$

例 2： 数列 $\{a_n\}$ 满足下列关系： $a_1=2a,a_{n+1}=2a-\frac{a^2}{a_n},a\neq 0$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式

解： 作函数 $f(x)=2a-\frac{a^2}{x}$，解方程 $f(x)=x$ 求出不动点 $p=a$，于是

$$\frac{1}{a_{n+1}-a}=\frac{1}{2a-\frac{a^2}{a_n}-a}=\frac{1}{a-\frac{a^2}{a_n}}=\frac{a_n}{a(a_n-a)}=\frac{1}{a_n-a}+\frac{1}{a}$$

所以 $\{\frac{1}{a_n-a}\}$ 是以 $\frac{1}{a_1-a}=\frac{1}{a}$ 为首项，公差为 $\frac{1}{a}$ 的等差数列

所以 $\frac{1}{a_n-a}=\frac{1}{a_1-a}+(n-1)\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a}+(n-1)\cdot\frac{1}{a}=\frac{n}{a}$，所以 $a_n=a+\frac{a}{n}$

定理 3： 设函数 $f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{ex+f}(a\neq 0,e\neq 0)$ 有两个不同的不动点 x_1,x_2，且由

$u_{n+1}=f(u_n)$确定着数列$\{u_n\}$,那么当且仅当$b=0,e=2a$时,$\frac{u_{n+1}-x_1}{u_{n+1}-x_2}=(\frac{u_n-x_1}{u_n-x_2})^2$

证明: $\because x_k$是$f(x)$的两个不动点

$$\therefore x_k=\frac{ax_k^{\ 2}+bx_k+c}{ex_k+f}\text{即}c-x_kf=(e-a)x_k^{\ 2}-bx_k\ (k=1,2)$$

$\therefore$

$$\frac{u_{n+1}-x_1}{u_{n+1}-x_2}=\frac{au_n^{\ 2}+bu_n+c-x_1(eu_n+f)}{au_n^{\ 2}+bu_n+c-x_2(eu_n+f)}=\frac{au_n^{\ 2}+(b-ex_1)u_n+c-x_1f}{au_n^{\ 2}+(b-ex_2)u_n+c-x_2f}=\frac{au_n^{\ 2}+(b-ex_1)u_n+(e-a)x_1^{\ 2}-bx_1}{au_n^{\ 2}+(b-ex_2)u_n+(e-a)x_2^{\ 2}-bx_2}$$

于是,

$$\frac{u_{n+1}-x_1}{u_{n+1}-x_2}=(\frac{u_n-x_1}{u_n-x_2})^2\Leftrightarrow\frac{au_n^{\ 2}+(b-ex_1)u_n+(e-a)x_1^{\ 2}-bx_1}{au_n^{\ 2}+(b-ex_2)u_n+(e-a)x_2^{\ 2}-bx_2}=\frac{u_n^{\ 2}-2x_1u_n+x_1^{\ 2}}{u_n^{\ 2}-2x_2u_n+x_2^{\ 2}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{u_n^{\ 2}+\frac{b-ex_1}{a}u_n+\frac{(e-a)x_1^{\ 2}-bx_1}{a}}{u_n^{\ 2}+\frac{b-ex_2}{a}u_n+\frac{(e-a)x_2^{\ 2}-bx_2}{a}}=\frac{u_n^{\ 2}-2x_1u_n+x_1^{\ 2}}{u_n^{\ 2}-2x_2u_n+x_2^{\ 2}}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{b-ex_1}{a}=-2x_1\\\frac{b-ex_2}{a}=-2x_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b+(2a-e)x_1=0\\b+(2a-e)x_2=0\end{cases}$$

$\because\begin{vmatrix}1 & x_1\\1 & x_2\end{vmatrix}\neq0$ $\qquad\therefore$方程组有唯一解$b=0,e=2a$

例 3: 已知数列$\{a_n\}$中,$a_1=2,a_{n+1}=\frac{a_n^{\ 2}+2}{2a_n},n\in N^*$,求数列$\{a_n\}$的通项.

解:作函数为$f(x)=\frac{x^2+2}{2x}$,解方程$f(x)=x$得$f(x)$的两个不动点为$\pm\sqrt{2}$

$$\frac{a_{n+1}-\sqrt{2}}{a_{n+1}+\sqrt{2}}=\frac{\frac{a_n^{\ 2}+2}{2a_n}-\sqrt{2}}{\frac{a_n^{\ 2}+2}{2a_n}+\sqrt{2}}=\frac{a_n^{\ 2}+2-2\sqrt{2}a_n}{a_n^{\ 2}+2+2\sqrt{2}a_n}=(\frac{a_n-\sqrt{2}}{a_n+\sqrt{2}})^2$$

再经过反复迭代,得

$$\frac{a_n-\sqrt{2}}{a_n+\sqrt{2}}=(\frac{a_{n-1}-\sqrt{2}}{a_{n-1}+\sqrt{2}})^2=(\frac{a_{n-2}-\sqrt{2}}{a_{n-2}+\sqrt{2}})^{2^2}=\cdots\cdots=(\frac{a_1-\sqrt{2}}{a_1+\sqrt{2}})^{2^{n-1}}=(\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}})^{2^{n-1}}$$

由此解得$a_n=\sqrt{2}\cdot\dfrac{(2+\sqrt{2})^{2^{n-1}}+(2-\sqrt{2})^{2^{n-1}}}{(2+\sqrt{2})^{2^{n-1}}-(2-\sqrt{2})^{2^{n-1}}}$

其实不动点法除了解决上面所考虑的求数列通项的几种情形,还可以解决如下问题:

例 4： 已知$a_1>0,a_1\neq1$且$a_{n+1}=\dfrac{{a_n}^4+6{a_n}^2+1}{4a_n({a_n}^2+1)}$,求数列$\{a_n\}$的通项.

解: 作函数为$f(x)=\dfrac{x^4+6x^2+1}{4x(x^2+1)}$,解方程$f(x)=x$得$f(x)$的不动点为

$x_1=-1,x_2=1,x_3=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}i,x_4=\dfrac{\sqrt{3}}{3}i$.取$p=1,q=-1$,作如下代换:

$$\frac{a_{n+1}+1}{a_{n+1}-1}=\frac{\dfrac{{a_n}^4+6{a_n}^2+1}{4a_n({a_n}^2+1)}+1}{\dfrac{{a_n}^4+6{a_n}^2+1}{4a_n({a_n}^2+1)}-1}=\frac{{a_n}^4+4{a_n}^3+6{a_n}^2+4a_n+1}{{a_n}^4-4{a_n}^3+6{a_n}^2-4a_n+1}=(\frac{a_n+1}{a_n-1})^4$$

逐次迭代后,得:$a_n=\dfrac{(a_1+1)^{4^{n-1}}+(a_1-1)^{4^{n-1}}}{(a_1+1)^{4^{n-1}}-(a_1-1)^{4^{n-1}}}$