让反思与探究成为学生学习常态

倪树平

（浙江省桐乡第二中学 314511）

1 引言

《普通高中数学课程标准(2017 年版)》明确指出："普通高中的培养目标是进一步提升学生综合素质，着力发展核心素养，使学生具有理想信念和社会责任感，具有科学文化素养和终身学习能力，具有自主发展能力和沟通合作能力. 数学学科核心素养是数学课程目标的集中体现，是具有数学基本特征的思维品质、关键能力以及情感、态度与价值观的综合体现，是在数学学习和应用的过程中逐步形成和发展的. 教师要把教学活动的重心放在促进学生学会学习上，积极探索有利于促进学生学习方式的多样化教学方式. 教师要加强学习方法指导，帮助学生养成良好的数学学习习惯，敢于质疑、善于思考，理解概念、把握本质，数形结合、明晰算理，厘清知识的来龙去脉，建立知识之间的关联."[1]可见，深化普通高中课程改革，践行《新课标》的核心之一是转变教师的教育理念，坚持教学方式的变革，特别是学生学习方式的变革，倡导积极主动、敢于质疑、善于思考、自主探究、合作交流的学习方式. 笔者认为反思与探究是学生学习方式的重中之重，是促进学生有效学习、发展数学核心素养的必然要求，教师要加强对学生数学解题反思的指导与实践，激发他们的思维活力，让反思与探究成为他们的学习常态. 下面的教学案例是基于这种理念下的有益尝试，旨在抛砖引玉，与同行共享.

2 案例呈现

2.1 "向量与不等式恒成立问题"教学案例

题 1(2013 年浙江高考理科第 7 题)设$\triangle ABC$，P_0 是边 AB 上一定点，满足 $P_0B=\frac{1}{4}AB$，且对于边 AB 上任一点 P，恒有$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}\geqslant\overrightarrow{P_0B}\cdot\overrightarrow{P_0C}$，则(　　)

A. $\angle ABC=90°$　　B. $\angle BAC=90°$

C. $AB=AC$　　D. $AC=BC$

师：解决平面向量问题的一般的通法有哪些?

生 1：我们通常可以用代数法和几何法两种方法.

师：很好！代数法中的常用方法又是什么? 下面请同学们先从代数的角度去探究解题思路.

生 1：代数法中常用的是坐标法，我是考虑用坐标法做. 如图 1，以 AB 的中点 O 为原点，AB 所在的直线为 x 轴建立平面直角坐标系，设 $AB=4a(a>0)$，则 $A(-2a,0)$，$B(2a,0)$，$P_0(a,0)$，$P(x,0)(-2a\leqslant x\leqslant 2a)$，设 $C(c,d)$，则$\overrightarrow{PB}=(2a-x,0)$，$\overrightarrow{PC}=(c-x,d)$，$\overrightarrow{P_0B}=(a,0)$，$\overrightarrow{P_0C}=(c-a,d)$由题意得：$(2a-x)(c-x)\geqslant a(c-a)$整理得：$(x-a)(x-a-c)\geqslant 0$ 对于 $x\in[-2a,2a]$恒成立，所以方程$(x-a)(x-a-c)=0$ 的两根相等，即 $c=0$，所以 C 在 y 轴上，即 $AC=BC$.

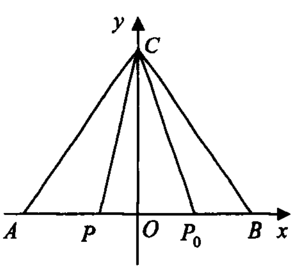

图 1

师：很好！坐标法是代数法中的重要方法，这位同学用坐标法通过向量的坐标运算将不等式转化为其等价的代数形式，再利用不等式恒成立的思想求解，思路非常清晰！请同学们回顾反思坐标法的本质是什么?

生 2：应该是建系设点然后进行代数运算的方法.

师：这就是坐标法，坐标法的本质是将几何问题代数化，也就是将几何问题转化为代数运算. 本题是已知向量数量积的不等关系，除了向量数量积的坐标运算还有其他的方法吗?

生 3：有，我不建系直接用向量数量积的定义运算的，如图 2，过 C 作 $CO \perp AB$，垂足为 O，因为 $P_0B=\frac{1}{4}AB$，因为 P_0 在靠近 B 处的一个点，若 O 在 P_0 的右侧时，$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}\geqslant\overrightarrow{P_0B}\cdot\overrightarrow{P_0C}$ 不恒成立，所以 O 在 P_0 的左侧. 当 P 在线段 OA 上时，$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}\geqslant 0$，$\overrightarrow{P_0B}\cdot\overrightarrow{P_0C}\leqslant 0$，所以恒有 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}\geqslant\overrightarrow{P_0B}\cdot\overrightarrow{P_0C}$ 成立；当 P 在线段 OB 上时，

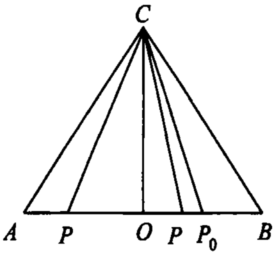

图 2

$$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=|\overrightarrow{PB}|\cdot|\overrightarrow{PC}|\cos\angle CPB$$
$$=-|\overrightarrow{PO}|\cdot|\overrightarrow{PB}|,$$
$$\overrightarrow{P_0B}\cdot\overrightarrow{P_0C}=|\overrightarrow{P_0B}|\cdot|\overrightarrow{P_0C}|\cos\angle CP_0B$$
$$=-|\overrightarrow{P_0O}|\cdot|\overrightarrow{P_0B}|,$$

因为 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}\geqslant\overrightarrow{P_0B}\cdot\overrightarrow{P_0C}$ 恒成立，

所以 $|\overrightarrow{PO}|\cdot|\overrightarrow{PB}|\leqslant|\overrightarrow{P_0O}|\cdot|\overrightarrow{P_0B}|$ 恒成立，

即 $(|\overrightarrow{PO}|\cdot|\overrightarrow{PB}|)_{\max}=|\overrightarrow{P_0O}|\cdot|\overrightarrow{P_0B}|$，

令 $|\overrightarrow{PB}|=x$，$|\overrightarrow{OB}|=a$，$|\overrightarrow{PO}|=a-x$，

所以 $|\overrightarrow{PO}|\cdot|\overrightarrow{PB}|=(a-x)x=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}$，

当 $x=\frac{a}{2}$ 即 $|\overrightarrow{PB}|=\frac{a}{2}$ 时，

$|\overrightarrow{PO}|\cdot|\overrightarrow{PB}|$ 取最大值为 $|\overrightarrow{P_0O}|\cdot|\overrightarrow{P_0B}|$，

即 P 在 P_0 时取到最大值，

所以 $P_0B=\frac{1}{2}OB=\frac{1}{4}AB$，即 $AO=OB$，

所以 $AC=BC$.

师：很好！向量数量积的定义运算也是代数法，这里用到了向量数量积的几何意义，体现了数形结合的思想，是一种好方法. 平面向量是以平面几何为背景的一个几何概念，因此一般来说平面向量问题也可以用几何法解决，下面请同学们探究怎样从几何的角度去思考？

学生沉思，如何将题中的不等式转化为几何图形间的内在联系对学生的思维挑战要求更高.

生 4：我想到用极化恒等式来转化，如图 3，取 BC 的中点 M，连结 PM，P_0M，因为 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=\frac{1}{4}[(2\overrightarrow{PM})^2-\overrightarrow{BC}^2]$，$\overrightarrow{P_0B}\cdot\overrightarrow{P_0C}=\frac{1}{4}[(2\overrightarrow{P_0M})^2-\overrightarrow{BC}^2]$，因为 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}\geqslant\overrightarrow{P_0B}\cdot\overrightarrow{P_0C}$ 对于边 AB 上任一点 P 恒成立，所以 $|\overrightarrow{PM}|\geqslant|\overrightarrow{P_0M}|$ 恒成立，所以 $|\overrightarrow{P_0M}|$ 是 $|\overrightarrow{PM}|$ 的最小值，即 P_0M 是 M 到直线 AB 的垂线段，所以 $P_0M\perp AB$，取 AB 的中点 N，因为 $P_0B=\frac{1}{4}AB$，所以 P_0 是 BN 的中点，所以 $P_0M \parallel CN$，所以 $CN\perp AB$，所以 $AC=BC$.

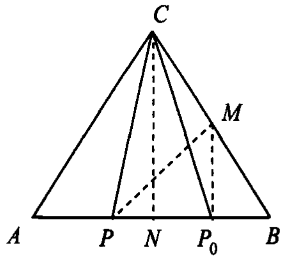

图 3

师：很好！几何法的关键是如何将已知条件转化为几何图形间的内在联系，这位同学利用极化恒等式将向量数量积转化为向量模的形式，利用向量模的几何意义和不等式恒成立的思想求解，过程很简洁！那么，请同学们反思几何法的本质是什么？

生 5：几何法的本质是寻找数学量的几何意义求解.

师：很好！同学们要真正领悟代数法和几何法的本质才能引领我们解题. 三种方法给我们的印象是第一种坐标法，思维层次要求不是很高，但有一定的运算量，第二种方法用向量数量积的几何意义把问题进行等价转化，用函数的思想求出最大值，运算量不大，思维层次有所提高，第三种方法通过极化恒等式将问题转化为 BC 中点 M 到 AB 上任一点 P 距离最小为 $|\overrightarrow{P_0M}|$，运算量很小，但思维要求更高，三种方法都体现了数形结合的思想，第二、三种方法更体现了几何法的本质意义，每一种方法都是在理解方法本质的基础上对前面方法的优化. 下面我们再来看看 2015 年的浙江高考题.

题 2（2015 年浙江高考理科第 15 题）已知 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是空间单位向量，$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=\frac{1}{2}$，若空间向量 $\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}_1=2$，$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}_2=\frac{5}{2}$，且对于任意的 $x,y\in\mathbf{R}$，$|\boldsymbol{b}-(x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2)|\geqslant|\boldsymbol{b}-(x_0\boldsymbol{e}_1+y_0\boldsymbol{e}_2)|=1$（$x_0,y_0\in\mathbf{R}$），则 $x_0=$________，$y_0=$________，$|\boldsymbol{b}|=$________.

师：请同学们先思考坐标法如何解？

生 6：建立空间直角坐标系，设 $\boldsymbol{e}_1=(1,0,0)$，由 $\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=\frac{1}{2}$，可设 $\boldsymbol{e}_2=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，设 $\boldsymbol{b}=(m,n,t)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}_1=m=2\\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}_2=\frac{1}{2}m+\frac{\sqrt{3}}{2}n=\frac{5}{2}\end{cases}$，$\begin{cases}m=2\\ n=\sqrt{3}\end{cases}$，

所以 $\boldsymbol{b}=(2,\sqrt{3},t)$，

得 $\boldsymbol{b}-(x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2)=\left(2-x-\frac{y}{2},\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}y,t\right)$，

$\boldsymbol{b}-(x_0\boldsymbol{e}_1+y_0\boldsymbol{e}_2)=\left(2-x_0-\frac{y_0}{2},\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}y_0,t\right)$，

由题意得

$$\left(2-x-\frac{y}{2}\right)^2+\left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2+t^2 \geqslant\left(2-x_0-\frac{y_0}{2}\right)^2+\left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}y_0\right)^2+t^2=1$$

因为对于任意的 $x,y\in\mathbf{R}$ 不等式恒成立，

所以当 $\begin{cases}2-x-\frac{y}{2}=0\\ \sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}y=0\end{cases}$ 时，

$$\left[\left(2-x-\frac{y}{2}\right)^2+\left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2+t^2\right]_{\min}=t^2,$$

即 $t^2\geqslant\left(2-x_0-\frac{y_0}{2}\right)^2+\left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}y_0\right)^2+t^2$，

即 $\left(2-x_0-\frac{y_0}{2}\right)^2+\left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}y_0\right)^2\leqslant 0$，

有 $\begin{cases}2-x_0-\frac{y_0}{2}=0\\ \sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}y_0=0\end{cases}$，得 $x_0=1,y_0=2,t=\pm1$，

所以 $|\boldsymbol{b}|=2\sqrt{2}$.

师：很好！本题与前一题目相比是将向量从二维平面向量迁移到三维空间向量，坐标法还是离不开几何问题代数化的本质，做得非常好！下面同学们还是来探究几何法，看看几何法是否更简洁？

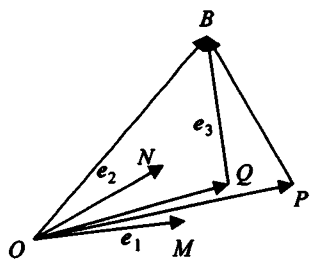

图 4

生 7：如图 4，设 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{e}_1,\overrightarrow{ON}=\boldsymbol{e}_2,\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2,\overrightarrow{OQ}=x_0\boldsymbol{e}_1+y_0\boldsymbol{e}_2$，由平面向量基本定理得：$P,Q$ 在平面 MON 上，因为 $|\boldsymbol{b}-(x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2)|\geqslant|\boldsymbol{b}-(x_0\boldsymbol{e}_1+y_0\boldsymbol{e}_2)|=1(x_0,y_0\in\mathbf{R})$，所以 $|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP}|\geqslant|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OQ}|=1$，即 $|\overrightarrow{PB}|\geqslant|\overrightarrow{QB}|=1$ 对于任意的 P 恒成立，也就是线段 BQ 的长为 B 到平面 MON 内任意一点 P 的距离的最小值，即 BQ 的长为 B 到平面 MON 的距离，

所以 $BQ\perp$ 平面 MON，令 $|\overrightarrow{QB}|=|\boldsymbol{e}_3|=1$，

所以 $\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3=0$，

$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QB}=x_0\boldsymbol{e}_1+y_0\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$，

所以 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}_1=(x_0\boldsymbol{e}_1+y_0\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)\cdot\boldsymbol{e}_1=x_0+\frac{1}{2}y_0=2$，

$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}_2=(x_0\boldsymbol{e}_1+y_0\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)\cdot\boldsymbol{e}_2=\frac{1}{2}x_0+y_0=\frac{5}{2}$，

所以 $x_0=1,y_0=2,\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$，即 $|\boldsymbol{b}|=2\sqrt{2}$.

师：非常漂亮！这位同学始终抓住几何法的本质是找向量的几何意义，将不等式转化为两个向量模的恒不等关系，从题 1 关于平面中点到直线的距离迁移到空间点到平面的距离，找到了问题的突破口. 代数法和几何法是解决向量问题的两种基本方法，各有优缺点，代数法入口容易运算量较大，几何法思维要求较高运算简洁，同学们要抓住本质，找准入口，学会灵活应用.

2.2 “直线与抛物线位置关系”教学案例

试题（2017 年浙江高考第 21 题）如图 5，抛物线 $x^2=y$，点 $A\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$，$B\left(\frac{3}{2},\frac{9}{4}\right)$，抛物线上的点 $P(x,y)\left(-\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}\right)$，过点 B 作直线 AP 的垂线，垂足为 Q.（1）求直线 AP 斜率的取值范围；（2）求 $|PA|\cdot|PQ|$ 的最大值.

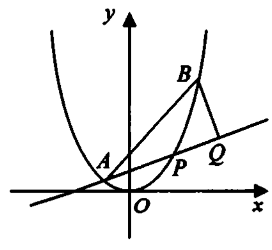

图 5

试题评析：本题第一小题考查直线斜率公式，第二小题考查直线方程、两直线位置关系、弦长公式、直线与抛物线位置关系、求函数最值等知识点，重点考查函数、化归与转化、坐标法等数学思想方法. 试题入口宽，方法多，可以从不同角度形成不同的解题思路，是培养学生反思解题方向、优化解题方法的一道好题，具有较高的教学运用价值，是我们课堂教学的好素材.

生 1：我是根据直线斜率公式来求，

因为 $P(x,x^2),k_{AP}=\dfrac{x^2-\frac{1}{4}}{x+\frac{1}{2}}=x-\frac{1}{2}$，

又$-\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$,故 $k_{AP}\in(-1,1)$.

师:很好!这位同学从直线斜率出发将直线 AP 的斜率表示成关于 x 的函数,求出范围,方向准,策略优.请同学们反思从其他角度还有没有好的方法?

生 2:我考虑用极端值法.当 P 趋近于 B 时,k_{AP} 趋近于 $k_{AB}=1$,当 P 趋近于 A 时,k_{AP} 趋近于抛物线在 A 处的切线的斜率 $y'|_{x=-\frac{1}{2}}=-1$,所以 $k_{AP}\in(-1,1)$.

师:这位同学从运动的观点考虑直线 AP 的两个极端位置求出其斜率的范围,也是本题的一种好思路,策略优,值得点赞.对于第二小题同学们可以从哪几个方向去思考解题方法?

生 3:设直线 AP 的斜率为 k,我想直接写出直线 AP 和 BQ 的方程,解出 Q 的坐标,再利用弦长公式把 $|PA|\cdot|PQ|$ 表示成关于 k 的函数,再由 k 的范围求其最大值.

师:我想这种思路非常自然,是一种通法,请同学们按此思路完成解题过程,请生 3 板演.

生 3:直线 AP 的方程为 $y-\frac{1}{4}=k\left(x+\frac{1}{2}\right)$,

直线 BQ 的方程为

$$y-\frac{9}{4}=-\frac{1}{k}\left(x-\frac{3}{2}\right)(k\neq0),$$

联立$\begin{cases}kx-y+\frac{k}{2}+\frac{1}{4}=0\\ x+ky-\frac{9k}{4}-\frac{3}{2}=0\end{cases}$,

得 $Q\left(\frac{-k^2+4k+3}{2k^2+2},\frac{9k^2+8k+1}{4k^2+4}\right)$,

因为 $x=k+\frac{1}{2}$,

所以 $|PA|=\sqrt{1+k^2}\left(x+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{1+k^2}(k+1)$,

$$|PQ|=\sqrt{1+k^2}(x_Q-x)=\frac{(k+1)(1-k^2)}{\sqrt{1+k^2}},$$

所以 $|PA|\cdot|PQ|=(k+1)^3(1-k)$,$k\in(-1,1)$,

构造函数 $f(k)=(k+1)^3(1-k)$,

有 $f'(k)=3(k+1)^2(1-k)-(k+1)^3$

$=-2(2k-1)(k+1)^2$,

当 $k\in\left(-1,\frac{1}{2}\right)$时,$f'(k)>0$,则 $f(k)$ 在 $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$上是增函数,当 $k\in\left(\frac{1}{2},1\right)$时,$f'(k)<0$,则 $f(k)$在$\left(\frac{1}{2},1\right)$上是减函数,所以 $f(k)_{\max}=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{27}{16}$,即$|PA|\cdot|PQ|_{\max}=\frac{27}{16}$.

当 $k=0$ 时,$P\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$,$Q\left(\frac{3}{2},\frac{1}{4}\right)$,

所以$|PA|\cdot|PQ|=1$;

所以$|PA|\cdot|PQ|_{\max}=\frac{27}{16}$.

师:请同学们反思解题方向、过程和方法,思考该方法有什么优缺点,更优方法还有吗?

生 4:这种方法比较自然容易想到,但运算过程复杂,不容易做对.

师:生 4 评价很好!那我们来探究其他的思路,刚才我们把$|PA|$,$|PQ|$都看成是弦长的概念,从另一个角度看还是一个什么数学概念?

生 5:$|PA|$,$|PQ|$也是向量的模长概念.

师:很好!因此,此问题我想从向量的角度来思考方法是否更优?请写出解题过程.

生 6:,设 $P(x,x^2)$,由(1)知 $x=k+\frac{1}{2}$,

$\overrightarrow{PA}=\left(-\frac{1}{2}-x,\frac{1}{4}-x^2\right)=(-1-k,-k^2-k)$,

因为 $Q\left(\frac{-k^2+4k+3}{2k^2+2},\frac{9k^2+8k+1}{4k^2+4}\right)$,

所以$\overrightarrow{PQ}=\left(\frac{-k^3-k^2+k+1}{k^2+1},\frac{-k^4-k^3+k^2+k}{k^2+1}\right)$,

所以$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PQ}=-|\overrightarrow{PA}|\cdot|\overrightarrow{PQ}|$

$=(-1-k)\times\frac{-k^3-k^2+k+1}{k^2+1}+\frac{-k^4-k^3+k^2+k}{k^2+1}\times(-k^2-k)$

$=\frac{(k+1)^3(k-1)}{k^2+1}+\frac{k^2(k+1)^3(k-1)}{k^2+1}$

$=(k+1)^3(k-1)$,

所以$|\overrightarrow{PA}|\cdot|\overrightarrow{PQ}|=(k+1)^3(1-k)$,

下同上做法.

师:向量的角度思路很好!但这位同学的运算过程还是显得有点复杂,请同学们反思其运算方向如何?能否选择更好的运算方向?

生 7:因为 $P(x,x^2)$,我选择用 x 作为变量来做试试看,$\overrightarrow{PA}=\left(-\frac{1}{2}-x,\frac{1}{4}-x^2\right)$,$\overrightarrow{PQ}=\cdots\cdots$,

生 7 思维受阻.

师:求$\overrightarrow{PQ}$还是要回到求 Q 的坐标,我想能否将$\overrightarrow{PQ}$转化为$\overrightarrow{PB}$来做?因为$\overrightarrow{PB}$是已知的.

生 7：可以，$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BQ}$，

所以$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BQ})=\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$，

因为$\overrightarrow{PB}=\left(\frac{3}{2}-x,\frac{9}{4}-x^2\right)$，

所以$|PA|\cdot|PQ|=-\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PQ}=-\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$

$=\left(\frac{1}{2}+x\right)\left(\frac{3}{2}-x\right)-\left(\frac{1}{4}-x^2\right)\left(\frac{9}{4}-x^2\right)$

$=-x^4+\frac{3}{2}x^2+x+\frac{3}{16}$，

构造函数 $f(x)=-x^4+\frac{3}{2}x^2+x+\frac{3}{16}$，

$-\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$，$f'(x)=-4x^3+3x+1$，

因为 $f'(1)=0$，

$f'(x)=-4x^3+4+3x-3=-(x-1)(2x+1)^2$，

当 $x\in\left(-\frac{1}{2},1\right)$时，$f'(x)>0$，

故 $f(x)$在$\left(-\frac{1}{2},1\right)$上是增函数，

当 $x\in\left(1,\frac{3}{2}\right)$时，$f'(x)<0$，

故 $f(x)$在$\left(1,\frac{3}{2}\right)$上是减函数，

所以 $f(x)_{\max}=f(1)=\frac{27}{16}$，即$|PA|\cdot|PQ|_{\max}=\frac{27}{16}$.

师：很好！这位同学避开了直接求$\overrightarrow{PQ}$的坐标，将$|PA|\cdot|PQ|$转化为已知向量$\overrightarrow{PA}$，$\overrightarrow{PB}$的数量积，再利用向量的坐标运算构造函数，运算比较简洁，不失为一种好方法. 请同学们思考$\overrightarrow{PQ}$与$\overrightarrow{PB}$的关系除了$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BQ}$还有什么关系吗？

生 8：$|\overrightarrow{PQ}|=|\overrightarrow{PB}|\cos\angle BPQ$.

师：很好！因此，这里我们还可以从向量投影的角度来考虑也是一种很好的思路，所以$|\overrightarrow{PA}|\cdot|\overrightarrow{PQ}|=|\overrightarrow{PA}|\cdot|\overrightarrow{PB}|\cdot\cos\angle BPQ=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{PB}$，因此，我们要学会多反思，从不同的角度将问题进行等价转化，生成不同的解题思路. 还有其他的思路吗？

至此，通过反思与探究收获了三种不同的解题思路，每一次探究都是一次方法优化的过程，学生们积极性都很高，此时教师的追问和引导进一步激发学生的探究欲望，学生陷入了沉思.

师：我想从运动变化的观点来考虑当 P 在抛物线弧 AB 上运动时，点 Q 的轨迹是什么？

生 9：点 Q 的轨迹是以 AB 为直径的半圆.

师：很好！$|PA|\cdot|PQ|$是圆的一条弦 AQ 被点 P 分成的两条线段长的乘积，我想可否利用平面几何的知识进行转化？

生 10：如图 6，连结 P 与圆心 C 交圆于 E，F 两点，由相交弦定理得：$|PA|\cdot|PQ|=|PE|\cdot|PF|$，因为$|AB|=2\sqrt{2}$，所以圆的半径为 $|CE|=|CF|=\sqrt{2}$，

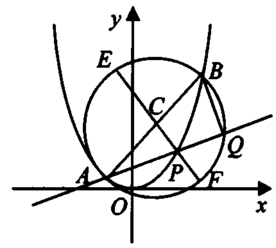

图 6

所以$|PA|\cdot|PQ|=|PE|\cdot|PF|$

$=(|CE|+|PC|)(|CF|-|PC|)=2-|PC|^2$，

因为 $P(x,x^2)$，$C\left(\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right)$，所以$|PA|\cdot|PQ|=$

$\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(x^2-\frac{5}{4}\right)^2\right]=-x^4+\frac{3}{2}x^2+x+\frac{3}{16}$，

构造函数 $f(x)=-x^4+\frac{3}{2}x^2+x+\frac{3}{16}$，$-\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$，下同上.

师：很好！该同学回归到平面几何的角度求解，思维要求较高，但运算量大大减少，平面解析几何的本质是用代数的方法解决平面几何问题，当然平面几何中的公理、定理在解题中仍旧适用，因此，利用好平面几何知识解决平面解析几何问题可优化方法简化过程.

3 教学思考

3.1 反思学科思想方法，探究知识迁移过程

《普通高中数学课程标准(2017 年版)》指出："高中数学课程要体现社会发展的需求、数学学科的特征和学生的认知规律，发展学生数学学科核心素养，突出数学主线，凸显数学的内在逻辑和思想方法."[1]数学思想方法是处理数学问题的指导思想和基本策略，是数学的灵魂和精髓，是形成良好认知结构的纽带，也是知识转化为能力的桥梁，是培养学生数学观念，形成优良思维品质的关键. 数学解题离不开数学思想方法的引领，每一道数学试题都会考查蕴涵其中的数学思想方法，因此，数学解题教学中让学生反思学科思想方法，探究知识迁移过程更符合学生的认知规律，提升学生的认知力，有利于发展学生数学学科核心素养.

案例 2.1 中关于向量的两个问题，通过代数和几何两个视角去解决，教师引导学生反思解决向量问题的两种通法——代数法和几何法，在理解两种方法本质的基础上探究将向量从二维平面

向量迁移到三维空间向量，将平面几何中点到直线的距离迁移到立体几何中点到平面的距离，通过对思想方法本质的理解实现了知识的顺利迁移过程，建立起知识间的内在联系，培养函数与方程、数形结合、化归与转化等基本数学学科思想方法，发展学生逻辑推理、数学建模、直观想象和数学运算等方面的学科核心素养.

3.2 反思解题过程方向，探究思路生成过程

问题是数学的心脏，数学教学离不开解决问题，更离不开解题教学，常常听到有的教师抱怨这个问题我讲过 N 遍了，学生还是不会，问题就出在教师急于完成教学任务，想多讲几个题，总认为让学生见多识广，常常忽视了反思解题过程方向，忽视了解题思路的生成过程，导致学生表面上是听明白了，听懂了，但实际是知其然，不知其所以然，更没有厘清其中知识的来龙去脉.学生从听懂到掌握会做还有很大一段差距，因此，我们把解题教学的内涵定位应该是教学生学会怎样想、为什么这样想，教给学生解题的方向，探求思路的生成过程，而不仅是给学生讲题、把题讲清楚、让学生听懂.波利亚解题理论告诉我们：解题要做到“七分构思”即读题、审题、发散、联想、归纳，“三分表述”即书写、运算、订正、反思与回顾.因此，在解题教学中教师要注重与学生分享自身解题是怎样构思、怎样想、为什么这样想的体会，引导学生反思解题过程方向，注重解题思路与脉络生成的过程性分析与探究.

案例 2.2 中在教师的引导下，通过学生的主动反思与探究，生成四种不同的解题思路，在此过程中教师既遵循学生思维的自然形成，又不时融入自己的解题思想，引导学生对问题进行深入的剖析与探究，唤醒学生对知识之间内在联系的思考，反思概念、信息之间的必然联系，探求问题转化的新思路.第二小题中的目标 $|PA|$，$|PQ|$ 是弦长的概念，又是向量模长的概念，更是线段长的概念，因此，从弦长、向量数量积和圆幂定理等多个角度探究生成了不同的解题思路，让学生体会到解题过程是自然的有方向的，又感受到思路的生成过程是水到渠成的，同时在探究思路生成过程中发展数学核心素养.

3.3 反思数学本质内涵，探究方法优化过程

《普通高中数学课程标准（2017 年版）》的基本理念指出：“高中数学教学以发展学生数学学科核心素养为导向，创设合适的教学情境，启发学生思考，引导学生把握数学内容的本质.”[1] 数学本质简单地说就是数学知识内在的根本属性与规律.高考每年在变，每年都有很多新题，但它对数学本质和数学思想方法的考查却始终不变.因此，我们在教学中要引导学生反思数学本质、理解数学本质，揭示数学本质，让学生具有一双透过现象看本质的“慧眼”，只有引导学生把握数学本质，才能避免“不识庐山真面目，只缘身在此山中”的迷惘，才能充分体会蕴涵其中的数学思想方法，熟练掌握解决问题的通性通法，探究优化解决问题的策略方法，使学生的数学核心素养得到充分的发展.

案例 2.1 中题 1 关于向量数量积的不等式转化问题教师引导学生反思代数法和几何法本质的基础上，通过学生自主探究，形成了坐标法、数量积定义运算以及极化恒等式转化成向量模的几何意义三种解题思路方法，每一种方法都是在数形结合的基础上对解题过程的不断优化.案例 2.2 中对问题目标 $|PA|$，$|PQ|$ 识破它是弦长、向量模长和线段长的概念，将问题回归到本源去探究思考，更加明确探究方向，指引着整个探究活动高效开展，形成了应用弦长公式、向量数量积坐标运算和应用圆幂定理等不同的解题思路，方法得到优化，过程自然流畅.

4 结束语

波利亚语：“掌握数学就意味着善于解题.”数学学习离不开解题，引导学生在解题过程中进行反思与探究是教师的一种教学理念，主动反思与探究更是学生的一种学习常态.教师在解题教学中要引领学生反思学科思想方法，探究知识迁移过程，反思解题过程方向，探究思路生成过程，反思数学本质内涵，探究方法优化过程，始终让反思与探究成为学生学习常态，才能让学生真正领悟学习的真谛，数学的价值，学会数学地思维，把发展数学学科核心素养牢牢根植于数学学习的过程之中.

参考文献

[1]中华人民共和国教育部制订.普通高中数学课程标准(2017年版)[M].北京:人民教育出版社,2018

[2]卓斌.让数学探究成为学习数学的习惯—以《函数的零点》教学为例[J].数学通报,2016(3):27－33