2021 届高考数学模拟预热卷（新高考）（三）

【满分：150 分】

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.已知集合 $A=\{y\,|\,y=1-2^x\}$，$B=\{x\,|\,x^2-2x-3>0\}$，则 $A\cap \complement_R B=($　　$)$

A. $\varnothing$　　　　B. $[-1,1)$　　　　C. $(1,3]$　　　　D. $[-3,1)$

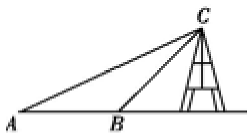
2.已知复数 $z=\dfrac{2}{1-i}$，则 $|z|$ 等于（　　）

A.1　　　　B. $\sqrt{2}$　　　　C.2　　　　D. $2\sqrt{2}$

3.现将爱国福，和谐福，友善福，富强福，敬业福排成一排，爱国福与敬业福相邻，则不同排法有______种(　　).

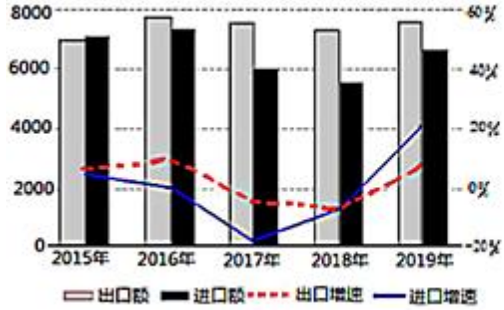
A．72　　　　B．24　　　　C．36　　　　D．48

4.如图,为测量一座古塔的高度,工作人员从与塔底同一水平面的 A 点测得塔顶 C 的仰角为 $15°$,然后从 A 出发朝古塔方向走了 30 米后到达 B 处,并测得此时的仰角为 $45°$,则此古塔的高度为(　　)



A. $15\sqrt{3}$ 米　　　　B. $(15\sqrt{3}-1)$ 米　　　　C. $(15\sqrt{3}-3)$ 米　　　　D. $15\left(\sqrt{3}-1\right)$ 米

5.“一带一路”是“丝绸之路经济带”和“21 世纪海上丝绸之路”的简称，旨在积极发展我国与沿线国家经济合作关系，共同打造政治互信、经济融合、文化包容的命运共同体.自 2015 年以来，“一带一路”建设成果显著.如图是 2015—2019 年，我国对“一带一路”沿线国家进出口情况统计图，下列描述错误的是(　　)



A．这五年，出口总额之和比进口总额之和大

B．这五年，2015 年出口额最少

C．这五年，2019 年进口增速最快

D．这五年，出口增速前四年逐年下降

6.某公司为激励创新，计划逐年加大研发资金投入.若该公司 2015 年全年投入研发资 130 万元，在此基础上，每年投入的研发资金比上一年增长 12%，则该公司全年投入的研发资金开始超过 200 万元的年份是(参考数据：$\lg 1.12\approx 0.05,\lg 1.3\approx 0.11,\lg 2\approx 0.30$)(　　)

A.2018 年　B.2019 年　C.2020 年　D.2021 年

7.在$\triangle ABC$中，M为边BC上任意一点，N为AM的中点，$\overrightarrow{AN}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$,则$\lambda+\mu$的值为(　)

A. $\frac{1}{2}$　B. $\frac{1}{3}$　C. $\frac{1}{4}$　D. 1

8.在下列区间中,函数$f(x)=\mathrm{e}^x+4x-3$的零点所在的区间为(　　)

A. $\left(-\frac{1}{4},0\right)$　B. $\left(0,\frac{1}{4}\right)$　C. $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$　D. $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$

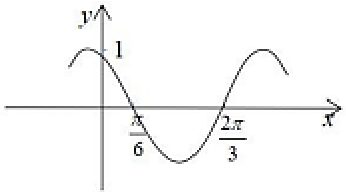
二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 3 分，有选错的得 0 分.

9.已知抛物线$C:y^2=2px\left(p>0\right)$的焦点$F$到准线的距离为 2,过点$F$的直线与抛物线交于$P,Q$两点, M为线段PQ的中点, O为坐标原点,则下列结论正确的是(　　)

A. C的准线方程为$y=-1$　B.线段PQ的长度最小为 4

C. M的坐标可能为$\left(3,2\right)$　D.$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=-3$恒成立

10.下图是函数$y=\sin(\omega x+\varphi)$,则$\sin(\omega x+\varphi)=$(　　)



A. $\sin(x+\frac{\pi}{3})$　B. $\sin(\frac{\pi}{3}-2x)$　C. $\cos(2x+\frac{\pi}{6})$　D. $\cos(\frac{5\pi}{6}-2x)$

11.已知函数$y=f\left(x\right)$是 R 上的奇函数，对于任意$x\in\mathrm{R}$，都有$f\left(x+4\right)=f\left(x\right)+f\left(2\right)$成立，

当 $x\in[0,2)$ 时， $f(x)=2^{x}-1$，给出下列结论，其中正确的是(　　)

A. $f(0)=0$

B.点 $(0,4)$ 是函数 $y=f(x)$ 的图象的一个对称中心

C.函数 $y=f(x)$ 在 $[-6,-2]$ 上单调递增

D.函数 $y=f(x)$ 在 $[-6,6]$ 上有 3 个零点

12.某市有 A,B,C,D 四个景点,一位游客来该市游览,已知该游客游览 A 的概率为 $\frac{2}{3}$,游览 B,C,D 的概率都是 $\frac{1}{2}$,且该游客是否游览这四个景点相互独立.用随机变量 X 表示该游客游览的景点个数,则(　　)

A.该游客至多游览一个景点的概率为 $\frac{1}{4}$　　　B. $P(X=2)=\frac{3}{8}$

C. $P(X=4)=\frac{1}{24}$　　　D. $E(X)=\frac{13}{6}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13.已知 F 为椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点, O 为坐标原点, M 为线段 OF 的垂直平分线与椭圆 C 的一个交点,若 $\cos\angle MOF=\frac{3}{7}$,则椭圆 C 的离心率为

____________________.

14.将数列 $\{2n-1\}$ 与 $\{3n-2\}$ 的公共项从小到大排列得到数列 $\{a_n\}$,则 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为

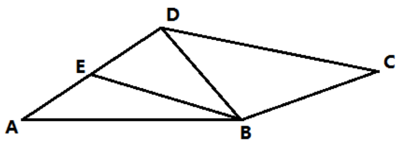
__________________.

15.已知四棱锥 $P-ABCD$ 的顶点都在球 O 的球面上，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，且 $PA\perp$ 面 $ABCD$，若四棱锥的体积为 $\frac{16}{3}$，则该球的体积为______________.

16.若三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 12，点 P 为棱 AA_1 上一点，则四棱锥 $P-BCC_1B_1$ 的体积为_____________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. （10 分）在四边形 $ABCD$ 中, $\angle A=\angle C$, E 是 AD 上的点且满足 $\triangle BED$ 与 $\triangle ABD$ 相似, $\angle AEB=\frac{3\pi}{4}$, $\angle DBE=\frac{\pi}{6}$, $DE=6\cdot$



(1)求 BD 的长度；

(2)求三角形 BCD 面积的最大值.

18.（12 分）已知各项均为正数的等差数列 $\{a_n\}$ 和等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_1=b_1=1$，且 $a_2\cdot a_3=6$，

$b_2\cdot b_3=a_8$

(1)求数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的通项公式.

(2)若 $c_n=\dfrac{1}{a_{2n}\log_2 b_{n+2}}$，求 $c_1+c_2+\ldots+c_n$.

19. （12分）某音乐院校举行“校园之星”评选活动，评委由本校全体学生组成，对 A,B 两位选手，随机调查了20个学生的评分，得到下面的茎叶图：

A选手										B选手							
									4	5	9						
								3	5	1							
							3	6	6	3	1						
5	2	4	0	7	1	9	5	5	7	8	3	6	7	7	1	6	7
				8	8	4	5	0	8	4	4	0	7	2			
						0	9	2	9	4	0						

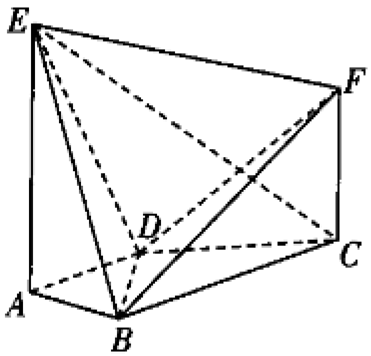
（1）通过茎叶图比较 A,B 两位选手所得分数的平均值及分散程度（不要求计算出具体值，得出结论即可）；

（2）校方将会根据评分记过对参赛选手进行三向分流：

所得分数	低于60分	60分到79分	不低于80分
分流方向	淘汰出局	复赛待选	直接晋级

记事件 C:“A 获得的分流等级高于 B”，根据所给数据，以事件发生的频率作为相应事件发生的概率，求事件 C 发生的概率.

20. （12 分）如图，$AE\perp$平面 $ABCD,CF\parallel AE,AD\parallel BC,AD\perp AB,AB=AD=1,AE=BC=2$.



(1)求证: $BF\parallel$平面 ADE ;

(2)求直线 CE 与平面 BDE 所成角的正弦值;

(3)若二面角 $E-BD-F$ 的余弦值为$\frac{1}{3}$,求线段 CF 的长.

21. （12 分）已知函数 $f\left(x\right)=e^{x}-ax-1$,其中 e 是自然对数的底数,实数 a 是常数.

（1）设 $a=e$,求函数 $f\left(x\right)$ 的图象在点 $\left(1,f\left(1\right)\right)$ 处的切线方程;

（2）讨论函数 $f\left(x\right)$ 的单调性.

22. （12 分）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过点$(0,\sqrt{3})$，离心率为$\frac{1}{2}$，左右焦点分别为 $F_1(-c,0)$， $F_2(c,0)$.

（1）求椭圆 C 的方程;

（2）P,N 是 C 上异于 M 的两点，若直线 PM 与直线 PN 的斜率之积为$-\frac{3}{4}$，证明: M,N 两点的横坐标之和为常数.

答案以及解析

一、单项选择题

1.答案：B

解析：集合 $A=\left\{y\mid y=1-2^{x}\right\}=\left(-\infty,1\right)$，

$B=\left\{x\mid x^{2}-2x-3>0\right\}=\left(-\infty,-1\right)\cup\left(3,+\infty\right)$，

则 $A\cap\complement_{R}B=\left(-\infty,1\right)\cap\left[-1,3\right]=\left[-1,1\right)$.

故选：B

2.答案：B

解析：∵复数 $z=\dfrac{2}{1-i}=\dfrac{2\left(1+i\right)}{\left(1-i\right)\left(1+i\right)}=\dfrac{2\left(1+i\right)}{1-i^{2}}=1+i$

∴ $\left|z\right|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

故选 B

3.答案：D

解析：先排爱国福与敬业福，共有 $A_{2}^{2}=2$ (种)不同排法，再将爱国福与敬业福看做一个整体与和谐福，友善福，富强福排序，共有 $A_{4}^{4}=24$ (种)不同排法，故由分步乘法计数原理可得，共有 $2\times24=48$ (种)不同排法

4.答案：D

解析：设古塔高度为 h 米,在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=30°$, $BC=\sqrt{2}h$, $AB=30$ 米.由正弦定理得 $\dfrac{AB}{\sin30°}=\dfrac{BC}{\sin15°}$,所以 $h=30\sqrt{2}\sin15^{\circ}$.因为 $\sin15^{\circ}=\sin\left(45^{\circ}-30^{\circ}\right)=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$,所以 $h=15(\sqrt{3}-1)$ 米.

5.答案：D

解析：对 A 项，由统计图可得，2015 年出口额和进口额基本相等，而 2016 年到 2019 年出口额都大于进口额，则 A 正确；

对 B 项，由统计图可得，2015 年出口额最少，则 B 正确；

对 C 项，由统计图可得，2019 年进口增速都超过其余年份，则 C 正确；

对 D 项，由统计图可得，2015 年到 2016 年出口增速是上升的，则 D 错误；

故选：D

6.答案：B

解析：设 x 年后研发资金超过 200 万元，则 $130(1+12\%)^{x}>200$，

即 $1.12^{x}>\dfrac{20}{13}, x\lg 1.12>\lg\dfrac{20}{13}, 0.05x>0.19$，解得 $x>3.8$，故选 B.

7.答案：A

解析：因为 M 为边 BC 上任意一点,故将 $\overrightarrow{AN}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$ 中的 $\overrightarrow{AN}$ 化为 $\overrightarrow{AM}$ 得

$\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$ 变形得 $\overrightarrow{AM}=2\lambda\overrightarrow{AB}+2\mu\overrightarrow{AC}$,则 $2\lambda+2\mu=1$,可得 $\lambda+\mu=\dfrac{1}{2}$

详解:因为 N 为 AM 的中点，$\overrightarrow{AN}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$,

所以 $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$,即 $\overrightarrow{AM}=2\lambda\overrightarrow{AB}+2\mu\overrightarrow{AC}$

因为 M 为边 BC 上任意一点,

所以 $2\lambda+2\mu=1$,

所以 $\lambda+\mu=\dfrac{1}{2}$

故选 A

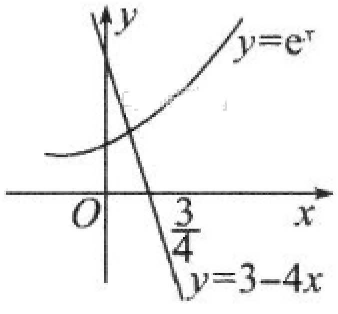
8.答案：C

解析： 显然 $f\left(x\right)$ 为定义在 R 上且图象连续的函数,

如图,作出 $y=\mathrm{e}^{x}$ 与 $y=3-4x$ 的图象,

由图像知函数 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}+4x-3$ 的零点一定落在区间 $\left(0,\dfrac{4}{3}\right)$ 内,

又 $f\left(\dfrac{1}{4}\right)=\sqrt[4]{\mathrm{e}}-2<0$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\mathrm{e}}-1>0$,故选 C。



二、多项选择题

9.答案：BCD

解析：由焦点 F 到准线的距离为 2,得抛物线 C 的焦点为$F(1,0)$,准线方程为$x=-1$,A 项错误.

设$P\left(x_1,y_1\right),Q\left(x_2,y_2\right)$,直线$PQ$的方程为$x=my+1$.联立$\begin{cases}y^2=4x,\\x=my+1,\end{cases}$消去 y 可得

$x^2-\left(4m^2+2\right)x+1=0$,消去 x 可得 $y^2-4my-4=0$,所以

$x_1+x_2=4m^2+2,y_1+y_2=4m$.$|PQ|=x_1+x_2+p=4m^2+4\geq 4$,故 B 项正确.当$m=1$时,可得

$M(3,2)$,所以 C 项正确.又 $x_1x_2=1,y_1y_2=-4$,所以$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=x_1x_2+y_1y_2=-3$,所以 D 项正确.故选 BCD.

10.答案：BC

解析：本题主要考查三角函数.

由题图可知,$\dfrac{T}{2}=\dfrac{2}{3}\pi-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$,

所以$T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}=\pi$,

所以$|\omega|=2$.

当$\omega=2$时,由函数图象过点$\left(\dfrac{\pi}{6},0\right),\left(\dfrac{2\pi}{3},0\right)$,

且 $f\left(0\right)>0$,得$A\varphi=\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,

所以$y=\sin\left(2x+\dfrac{2\pi}{3}\right)=-\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}-2x\right)$,

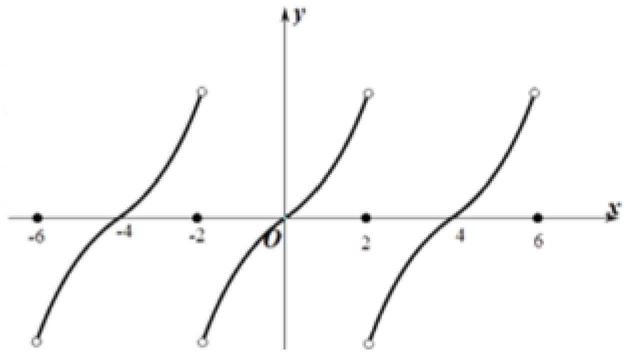
同理,当$\omega=-2$时,$\varphi=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,

所以$y=\sin\left(-2x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$.

故本题正确答案为 BC.

11.答案：AB

解析：在$f\left(x+4\right)=f\left(x\right)+f\left(2\right)$中，令$x=-2$，得$f\left(-2\right)=0$又因为函数$f\left(x\right)$是R 上的奇函数，所以$f\left(2\right)=-f\left(-2\right)-0$，A 正确$f\left(x+4\right)=f\left(x\right)$，故$f\left(x\right)$是一个周期为 4 的奇函数，因为$\left(0,0\right)$是函数$f\left(x\right)$的图象的一个对称中心,所以$\left(4,0\right)$也是函数$f\left(x\right)$的图象的一个对称中心，B 正确作出函数的部分图像如图所示



易得，函数 $f(x)$ 在 $[-6,-2]$ 上不具有单调性，C 错误 D、根据上图可知，函数 $f(x)$ 在 $[-6,6]$ 上有 7 个零点，D 错误

12.答案：ABD

解析： X 的所有可能取值为 0,1,2,3,4.

则 $P(X=0)=\left(1-\frac{2}{3}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{24}$,

$P(X=1)=\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3}+\left(1-\frac{2}{3}\right)\times C_{3}^{1}\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)^{2}=\frac{5}{24}$,

所以该游客至多游览一个景点的概率为 $P(X=0)+P(X=1)=\frac{1}{24}+\frac{5}{24}=\frac{1}{4}$,故 A 正确.

$P(X=2)=\frac{2}{3}\times C_{3}^{1}\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)^{2}+\left(1-\frac{2}{3}\right)\times C_{3}^{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)^{1}=\frac{3}{8}$,故 B 正确.

$P(X=4)=\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{3}=\frac{1}{12}$,故 C 错误.

又 $P(X=3)=\frac{2}{3}\times C_{3}^{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)^{1}+\left(1-\frac{2}{3}\right)\times C_{3}^{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{3}=\frac{7}{24}$,

所以 $E(X)=0\times\frac{1}{24}+1\times\frac{5}{24}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{7}{24}+4\times\frac{1}{12}=\frac{13}{6}$,故 D 正确.

故选 ABD.

三、填空题

13.答案： $\frac{2}{3}$

解析：由题意知 $F(c,0)$,则可设 $M\left(\frac{c}{2},y_0\right)$.将 $M\left(\frac{c}{2},y_0\right)$ 代入椭圆 C 的方程,得 $\frac{\frac{c^2}{4}}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$,

即 $b^2\left(1-\frac{c^2}{4a^2}\right)=y_0^2$.设 E 为线段 OF 的垂直平分线与 x 轴的交点,则 $\triangle MOE$ 为直角三角形.

由于 $\cos\angle MOF=\dfrac{3}{7}$,所以不妨设 $\dfrac{c}{2}=3$,则 $|OM|=7,c=6$.由勾股定理可得

$|ME|=\left|y_0\right|=\sqrt{7^2-3^2}=2\sqrt{10}$,即 $b^2\left(1-\dfrac{c^2}{4a^2}\right)=40$,得 $b^2\left(1-\dfrac{9}{a^2}\right)=40$.又 $a^2-b^2=36$,所以

$a^4-85a^2+324=0$,解得 $a^2=81$ 或 $a^2=4$ (舍去),故 $a=9$,所以椭圆 C 的离心率

$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{6}{9}=\dfrac{2}{3}$.

14.答案：$3n^2-2n$

解析：数列 $\{2n-1\}$ 表示首项为 1,公差为 2 的等差数列,各项均为正奇数,而数列 $\{3n-2\}$ 表示首项为 1,公差为 3 的等差数列,各项分别为交替出现的正奇数与正偶数,它们的公共项为数列 $\{3n-2\}$ 中的奇数项,所以 $\{a_n\}$ 是首项为 1,公差为 6 的等差数列,其前 n 项和

$S_n=n\times1+\dfrac{n(n-1)}{2}\times6=3n^2-2n$.

15.答案：$8\sqrt{6}\pi$

解析：设此球半径为 R，

因底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形,且 $PA\perp$ 面 $ABCD$,若四棱锥的体积为 $\dfrac{16}{3}$，

则 $\dfrac{1}{3}\times2\times2\times PA=\dfrac{16}{3}$， $\therefore PA=4$，

可以把四棱锥 $P-ABCD$ 补成一个以 $ABCD$ 为底、 PA 为侧棱的长方体，

则这个长方体的外接球就是四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球，球心 O 就是 PC 的中点，

$\therefore (2R)^2=PC^2=AP^2+AB^2+AC^2=4^2$,$\therefore R=\sqrt{6}$，

则该球的体积为 $\dfrac{4\pi R^3}{3}=8\sqrt{6}\pi$.

故答案为：$8\sqrt{6}\pi$.

16.答案：8

解析：$V_{P-BCC_1B_1}=V_{A-BCC_1B_1}=V_{ABC-A_1B_1C_1}-V_{A-A_1B_1C_1}-\dfrac{1}{3}V_{ABC-A_1B_1C_1}=\dfrac{2}{3}V_{ABC-A_1B_1C_1}=\dfrac{2}{3}\times12=8$.

四、解答题

17.答案：(1) $\angle BED=\pi-\angle AEB=\dfrac{\pi}{4}$,

在三角形 BDE 中,$\dfrac{DE}{\sin\angle DBE}=\dfrac{BD}{\sin\angle BED}$,

即 $\dfrac{6}{\sin\dfrac{\pi}{6}}=\dfrac{BD}{\sin\dfrac{\pi}{4}}$,

所以 $\dfrac{6}{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{BD}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$, $BD=6\sqrt{2}$；

(2)因为 $\triangle BED\sim\triangle ABD$,所以 $\angle C=\angle A=\angle DBE=\dfrac{\pi}{6}$,

在三角形 BDC 中, $BD^2=DC^2+BC^2-2DC\bullet BC\bullet\cos\dfrac{\pi}{6}$,

所以 $72=DC^2+BC^2-\sqrt{3}DC\bullet BC$,

所以 $72\geq 2DC\bullet BC-\sqrt{3}DC\bullet BC$,

所以 $DC\bullet BC\leq 72\left(2+\sqrt{3}\right)$,

所以 $S_{\triangle BCD}=\dfrac{1}{2}DC\cdot BC\cdot\sin\dfrac{\pi}{6}\leq\dfrac{1}{4}\times 72\left(2+\sqrt{3}\right)=18\left(2+\sqrt{3}\right)$,

所以三角形 BCD 面积的最大值为 $36+18\sqrt{3}$.

18.答案：(1)因为 $\left\{a_n\right\}$ 为等差数列，且 $a_1=1$，所以可设公差为 d，

则 $a_n=1+\left(n-1\right)d$，所以 $a_2=1+d$， $a_3=1+2d$.

因为 $a_2\cdot a_3=6$，所以 $\left(1+d\right)\left(1+2d\right)=6$，解得 $d=1$ 或 $d=-\dfrac{5}{2}$.

又等差数列 $\left\{a_n\right\}$ 各项均为正数，所以 $d=-\dfrac{5}{2}$ 不合题意，舍去所以 $a_n=n(n\in\mathbf{N}^*)$

因为 $\left\{b_n\right\}$ 为等比数列，且 $b_1=1$，所以可设公比为 $q(q\neq 0)$，则 $b_n=q^{n-1}$.

因为 $b_2\cdot b_3=a_8=8$，所以 $q^1\cdot q^2=8$，解得 $q=2$，满足各项均为正数，所以 $b_n=2^{n-1}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$.

(2)由(1)知 $a_n=n,b_n=2^{n-1}$，所以 $c_n=\dfrac{1}{a_{2n}\log_2 b_{n+2}}=\dfrac{1}{2n\left(n+1\right)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$.

所以 $c_1+c_2+\cdots+c_n=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{n}{2\left(n+1\right)}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$.

19.答案：（1）通过茎叶图可以看出，A 选手所得分数的平均值高于 B 选手所得分数的平均值；A 选手所得分数比较集中，B 选手所得分数比较分散.

（2）记 CA_1 表示事件：“A 选手直接晋级”， CA_2 表示事件：“A 选手复赛待选”；

CB_1 表示事件：“B 选手复赛待选”， CB_2 表示事件：“B 选手淘汰出局”.

则 CA_1 与 CB_1 独立，CA_2 与 CB_2 独立，CA_1 与 CA_2 互斥，$C=\left(CA_1CB_1\right)\cup\left(CA_1CB_2\right)\cup\left(CA_2CB_2\right)$.

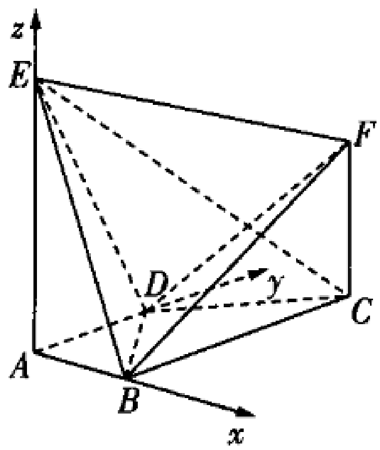
$P(C)=P(CA_1CB_1)+P(CA_1CB_2)+P(CA_2CB_2)=P(CA_1)P(CB_1)+P(CA_1)P(CB_2)+P(CA_2)P(CB_2)$

由所给数据得CA_1，CA_2，CB_1，CB_2发生的频率分别为$\frac{8}{20},\frac{11}{20},\frac{10}{20},\frac{3}{20}$，

故$\mathrm{P(CA_1)}=\frac{8}{20},\mathrm{P(CA_2)}=\frac{11}{20},\mathrm{P(CB_1)}=\frac{10}{20},\mathrm{P(CB_2)}=\frac{3}{20}$，

$P(C)=\frac{8}{20}\times\frac{10}{20}+\frac{8}{20}\times\frac{3}{20}+\frac{11}{20}\times\frac{3}{20}=\frac{137}{400}$.

20.答案：(1)依题意,可以建立以 A 为原点,分别以$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}$的方向为 x 轴，y 轴，z 轴正方向的空间直角坐标系(如图),可得$A(0,0,0),B(1,0,0),C(1,2,0),D(0,1,0),E(0,0,2)$.设$CF=h(h>0)$,则$F(1,2,h)$.



依题意,$\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$是平面$ADE$的法向量,又$\overrightarrow{BF}=(0,2,h)$,可得$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{AB}=0$,又直线$BF\not\subset$平面$ADE$,所以$BF$ // 平面ADE.

(2)依题意,$\overrightarrow{BD}=(-1,1,0),\overrightarrow{BE}=(-1,0,2),\overrightarrow{CE}=(-1,-2,2)$.

设$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$为平面BDE的法向量,则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BE}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-x+y=0,\\-x+2z=0,\end{cases}$不妨令$z=1$,可得$\boldsymbol{n}=(2,2,1)$.因此有$\cos\langle\overrightarrow{CE},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\overrightarrow{CE}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{CE}||\boldsymbol{n}|}=-\frac{4}{9}$.

所以,直线CE与平面BDE所成角的正弦值为$\frac{4}{9}$.

(3)设$\boldsymbol{m}=(x,y,z)$为平面BDF的法向量,则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\\\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BF}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-x+y=0,\\2y+hz=0,\end{cases}$

不妨令$y=1$,可得$\boldsymbol{m}=\left(1,1,-\frac{2}{h}\right)$.

由题意,有$|\cos\langle \boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\left|4-\dfrac{2}{h}\right|}{3\sqrt{2+\dfrac{4}{h^2}}}=\dfrac{1}{3}$,解得$h=\dfrac{8}{7}$.经检验,符合题意.

所以,线段CF的长为$\dfrac{8}{7}$.

21.答案：（1）$\because a=e$,$\therefore f\left(x\right)=e^x-ex-1$,

$\therefore f'\left(x\right)=e^x-e, f\left(1\right)=-1, f'\left(1\right)=0$.

$\therefore$当$a=e$时,函数$f\left(x\right)$的图象在点$\left(1,f\left(1\right)\right)$处的切线方程为$y=-1$

（2）$\because f\left(x\right)=e^x-ax-1$,

$\therefore f'\left(x\right)=e^x-a$.

当$a\le 0$时，$f'\left(x\right)>0$,故$f\left(x\right)$在 R 上单调递增;

当$a>0$时,由$f'\left(x\right)=e^x-a=0$,得$x=\ln a$,

$\therefore$当$x<\ln a$　　时，$f'\left(x\right)<0$,当$x>\ln a$时，$f'\left(x\right)>0$,

$\therefore f\left(x\right)$在$\left(-\infty,\ln a\right)$上单调递减,在$\left(\ln a,+\infty\right)$上单调递增.

综上,当$a\le 0$时，$f\left(x\right)$在 R 上单调递增;

当$a>0$时，$f\left(x\right)$在$\left(-\infty,\ln a\right)$上单调递减,在$\left(\ln a,+\infty\right)$上单调递增

22.答案：（1）因为椭圆经过点$\left(0,\sqrt{3}\right)$,所以$b=\sqrt{3}$;又因为$e=\dfrac{1}{2}$,

所以$\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$;又$c^2=a^2-b^2$,解$a=2,b=\sqrt{3}$,

所以椭圆 C 的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

（2）设P,M,N三点坐标分别为(x_P,y_P),(x_M,y_M),(x_N,y_N),

设直线PM,PN斜率分别为k_1,k_2，则直线PM 方程为$y-y_P=k_1(x-x_P)$,

由方程组$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\\ y-y_P=k_1(x-x_P)\end{cases}$　消去y，得

$(3+4{k_1}^2)x^2-8k_1(k_1x_P-y_P)x+4{k_1}^2{x_P}^2-8k_1x_Py_P+4{y_P}^2-12=0$,

由根与系数关系可得 $x_M + x_P = \dfrac{8k_1(k_1x_P - y_P)}{3+4{k_1}^2}$

故 $x_M = \dfrac{8k_1(k_1x_P - y_P)}{3+4{k_1}^2} - x_P = \dfrac{4{k_1}^2x_P - 8k_1y_P - 3x_P}{3+4{k_1}^2}$，

同理可得 $x_N + x_P = \dfrac{8k_2(k_2x_P - y_P)}{3+4{k_2}^2}$

又 $k_1 \cdot k_2 = -\dfrac{3}{4}$，

故 $x_N + x_P = \dfrac{8k_2(k_2x_P - y_P)}{3+4{k_2}^2} = \dfrac{8\left(-\dfrac{3}{4k_1}\right)\left(-\dfrac{3}{4k_1}x_P - y_P\right)}{3+4\left(-\dfrac{3}{4k_1}\right)^2} = \dfrac{6x_P + 8k_1y_P}{4{k_1}^2+3}$，

则 $x_N = \dfrac{6x_P + 8k_1y_P}{3+4{k_1}^2} - x_P = -\dfrac{4{k_1}^2x_P - 8k_1y_P - 3x_P}{3+4{k_1}^2} = -x_M$，

从而 $x_N + x_M = 0$.

即 M, N 两点的横坐标之和为常数.