

江苏省仪征中学 2018-2019 学年第一学期高三

数学周三练习(4)文科

2018.9.26

范围: 集合与逻辑、函数与导数、三角函数、平面向量、直线与圆、圆锥曲线、不等式

一、填空题: 本大题共 14 小题, 每小题 5 分, 计 70 分. 不需写出解答过程, 请把答案写在答题纸的指定位置上.

1. 已知集合 $A = \{1, 3\}$, $B = \{3, \log_2 m\}$, 若 $A \cup B = \{1, 2, 3\}$, 则 $m =$ _____.

2. 函数 $y = \sqrt{\log_{0.2} x}$ 的定义域为_____.

3. 命题 $p: \exists x_0 \in \mathbb{R}, x_0^2 - 2x_0 + 1 \leq 0$ 是_____命题 (选填“真”或“假”).

4. 函数 $f(x) = \sin \frac{\pi - x}{2} \sin \frac{x}{2}$ 的最小正周期为_____.

5. 过原点且倾斜角为 60° 的直线被圆 $x^2 + y^2 - 4y = 0$ 所截得的弦长为_____.

6. 双曲线 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的焦点到该双曲线渐近线距离为_____.

7. 已知直线 $x - y + 1 = 0$ 与曲线 $y = \ln x - a$ 相切, 则 a 的值为_____.

8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} x, & x \geq 2 \\ 2a^x - 3a, & x < 2 \end{cases}$ (其中 $a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的值域为 $\mathbb{R}$, 则实数 a 的取值范围为_____.

9. 若圆 $(x-3)^2 + (y+5)^2 = r^2$ 上有且只有两个点到直线 $l: 4x - 3y = 2$ 的距离等于 1, 则半径 r 的取值范围是_____.

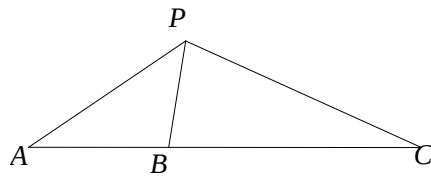
10. 在平面直角坐标系 xOy 中, 过点 $P(5, 3)$ 作直线 l 与圆 $x^2 + y^2 = 4$ 相交于 A, B 两点, 若 $OA \perp OB$, 则直线 l 的斜率为_____.

11. 已知函数 $f(x) = e^x - e^{-x} + 1$ (e 为自然对数的底数), 若 $f(2x-1) + f(4-x^2) > 2$, 则实数 x 的取值范围为_____.

12. $\triangle ABC$ 中, $\tan A = \frac{1}{3}$, $B = \frac{\pi}{4}$. 若椭圆 E 以 AB 为长轴, 且过点 C , 则椭圆 E 的离心率是_____.

13. 如图, A, B, C 是直线 l 上的三点, P 是直线 l 外一点, 若 $AB = \frac{1}{2}BC = 1$, $\angle CPB = 90^\circ$,

$\tan \angle APB = \frac{4}{3}$, 则 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} =$ _____.



14. 已知实数 x, y 满足 $x > y > 0$ 且 $x + y = 1$, 则 $\frac{2}{x+3y} + \frac{1}{x-y}$ 的最小值是_____.

二、解答题: 本大题共 6 小题, 计 90 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤, 请把答案写在答题纸的指定区域内.

15. 已知命题 p : x_1 和 x_2 是方程 $x^2 - mx - 2 = 0$ 的两个实根, 不等式 $a^2 - 5a - 3 \geq |x_1 - x_2|$ 对任意 $m \in [-1, 1]$ 恒成立; 命题 q : 不等式 $ax^2 + 2x - 1 > 0$ 有解, 若命题 p 是真命题, 命题 q 是假命题, 求实数 a 的取值范围.

16. 三角形 ABC 的对边分别为 a, b, c , 满足 $\frac{a}{\cos C \sin B} = \frac{b}{\sin B} + \frac{c}{\cos C}$.

(1) 求角 B ; (2) 若 $\cos A = \frac{3}{5}$, 试求 $\cos C$ 的值.

17. 已知圆 $C: x^2 + y^2 + 2x - 4y + 3 = 0$.

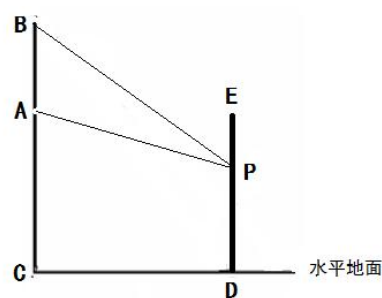
(1) 若圆 C 的切线在 x 轴、 y 轴上的截距相等, 求切线方程;

(2) 从圆 C 外一点 $P(x_1, y_1)$ 向该圆引一条切线, 切点为 M 且有 $|PM| = |PO|$ (O 为原点), 求使 $|PM|$ 取得最小值时点 P 的坐标.

18. 南京市江北新区计划在一个竖直长度为 20 米的瀑布 AB 正前方修建一座观光电梯 DE 。如图所示, 瀑布底部 A 距离水平地面的高度 AC 为 60 米, 电梯上设有一个安全拍照口 P , P 上升的最大高度为 60 米。设 P 距离水平地面的高度为 a 米, P 处拍照瀑布的视角 $\angle BPA$ 为 θ 。摄影爱好者发现, 要使照片清晰, 视角 θ 不能小于 30° 。

(1) 当 $a=50$ 米时, 视角 θ 恰好为 30° , 求电梯和山脚的水平距离 CD ;

(2) 要使电梯拍照口 P 的高度 a 在 52 米及以上时, 拍出的照片均清晰, 请求出电梯和山脚的水平距离 CD 的取值范围。



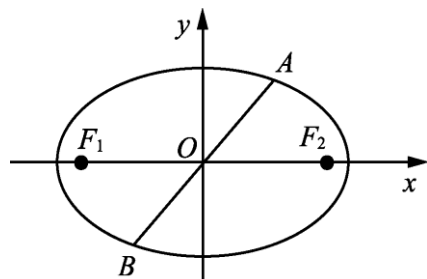
19. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 (a > 1)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , A, B 为椭圆上关于原点对称的两点, 椭圆 C 的离心率为 e .

(1) 若点 A 的坐标为 $(2e, \frac{1}{2})$, 求椭圆 C 的方程;

(2) 记 AF_1 的中点为 M , BF_1 的中点为 N , 若原点 O 在以线段 MN 为直径的圆上.

① 证明 $\vec{AF_1} \cdot \vec{AF_2}$ 为定值;

② 设直线 AB 的斜率为 k , 若 $k \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$, 求 e 的取值范围.



20. 已知函数 $f(x) = ax + \frac{a-2}{x} + 2 - 2a$ ($a > 0$).

(1) 当 $a=1$ 时, 求函数 $f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线方程;

(2) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(3) 若 $f(x) \geq 2 \ln x$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立, 求 a 的取值范围.

周三练习(4) 文科参考答案

1. 4 2. (0,1] 3. 真 4. 2π 5. $2\sqrt{3}$ 6. 3 7. -2
8. $[\frac{1}{2}, 1)$ 9. (4,6) 10. 1或 $\frac{7}{23}$ 11. (-1,3) 12. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 13. $-\frac{32}{17}$ 14. $\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$

15. 解:若 p 为真命题: $\because x_1 + x_2 = m, x_1 x_2 = -2,$

$$\therefore |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{m^2 + 8}.$$

$$\because m \in [-1, 1], \therefore |x_1 - x_2|_{\max} = 3.$$

$$\therefore a^2 - 5a - 3 \geq 3 \therefore a \leq -1 \text{ 或 } a \geq 6,$$

即 p 为真命题时, $a \leq -1$ 或 $a \geq 6$.

若 q 为真命题, $a=0$ 符合题意,

$$\text{若 } a \neq 0, \text{ 则有 } a > 0 \text{ 或 } \begin{cases} a < 0, \\ \Delta = 4 + 4a > 0. \end{cases}$$

$$\therefore a > 0 \text{ 或 } -1 < a < 0.$$

$$\therefore q \text{ 为真命题, 则 } a > -1.$$

故 q 为假命题时 $a \leq -1$.

综上实数 a 的取值范围为 $a \leq -1$.

16. 解: (1) 由已知得 $a = b \cos C + c \sin B$,

由正弦定理得: $\sin A = \sin B \cos C + \sin C \sin B$, $\sin(B+C) = \sin B \cos C + \sin C \sin B$,

$$\sin B \cos C + \cos B \sin C = \sin B \cos C + \sin C \sin B, \quad \cos B \sin C = \sin C \sin B \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } \triangle ABC \text{ 中 } \sin C > 0, \text{ 所以 } \cos B = \sin B, \text{ 又 } \sin B > 0 \therefore \cos B > 0 \therefore \tan B = \frac{\sin B}{\cos B} = 1,$$

$$\text{因为 } B \in (0, \pi), \text{ 所以 } B = \frac{\pi}{4}. \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 因为 } \cos A = \frac{3}{5}, A \in (0, \pi), \text{ 所以 } \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{4}{5}, \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{由 (1) 可知 } A + C = \frac{3\pi}{4}, \text{ 所以 } C = \frac{3\pi}{4} - A,$$

$$\cos C = \cos(\frac{3\pi}{4} - A) = \cos \frac{3\pi}{4} \cos A + \sin \frac{3\pi}{4} \sin A = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin A - \cos A) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\frac{4}{5} - \frac{3}{5}) = \frac{\sqrt{2}}{10} \quad \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$$

17. 解:

试题解析: (1) 将圆 C 化成标准方程得 $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 2$,

①当直线在两坐标轴上的截距为零时, 设直线方程为 $y=kx$, 由直线与圆相切得 $\frac{|-k-2|}{\sqrt{k^2+1}} = \sqrt{2}$, 即

$k=2 \pm \sqrt{6}$, 从而切线方程为 $y=(2 \pm \sqrt{6})x$.

②当直线在两坐标轴上的截距不为零时, 设直线方程为 $x+y-a=0$, 由直线与圆相切得 $x+y+1=0$ 或 $x+y-3=0$.

(2) 由 $|\overline{PO}|=|\overline{PM}|$ 得 $x_1^2+y_1^2=(x_1+1)^2+(y_1-2)^2-2 \Rightarrow 2x_1-4y_1+3=0$.

即点 P 在直线 l 为 $2x-4y+3=0$ 上, $|\overline{PM}|$ 取最小值时, 即 $|\overline{OP}|$ 取得最小值, 直线 $OP \perp l$, 于是直线 l_{OP} 的方程为 $2x+y=0$.

解方程组 $\begin{cases} 2x+y=0 \\ 2x-4y+3=0 \end{cases}$ 得 P 点坐标为 $(-\frac{3}{10}, \frac{3}{5})$.

18. 解: (1) 设 $CD=x$, 过 P 作 $PH \perp BC$, 垂足为 H。

$$\tan \angle BPH = \frac{30}{x}, \quad \tan \angle APH = \frac{10}{x}, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\therefore \tan \theta = \tan(\angle BPH - \angle APH) = \frac{\frac{30}{x} - \frac{10}{x}}{1 + \frac{30}{x} \cdot \frac{10}{x}} = \tan 30^\circ \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{解得: } CD = x = 10\sqrt{3} \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

解法二: 用余弦定理求解给分。

$$\begin{aligned} (2) \quad \tan \angle BPH &= \frac{80-a}{x}, \quad \tan \angle APH = \frac{60-a}{x} \\ \therefore \tan \theta &= \tan(\angle BPH - \angle APH) = \frac{\frac{80-a}{x} - \frac{60-a}{x}}{1 + \frac{80-a}{x} \cdot \frac{60-a}{x}} \dots\dots\dots 8 \text{ 分} \end{aligned}$$

由题知 $\tan \theta \geq \tan 30^\circ$ 在 $a \in [52, 60]$ 上恒成立 $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

$$\therefore 20\sqrt{3}x - x^2 \geq (80-a)(60-a) \text{ 在 } a \in [52, 60] \text{ 上恒成立} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$\therefore 20\sqrt{3}x - x^2 \geq 224 \quad \text{解得 } 10\sqrt{3} - 2\sqrt{19} \leq x \leq 10\sqrt{3} + 2\sqrt{19} \dots\dots\dots 15 \text{ 分}$$

答: CD 的取值范围 $10\sqrt{3} - 2\sqrt{19} \leq x \leq 10\sqrt{3} + 2\sqrt{19} \dots\dots\dots 16 \text{ 分}$

解法二: 利用 P 点轨迹方程是圆的一部分给分

19. 解: (1) 由题意知 $\frac{4e^2}{a^2} + \frac{1}{4} = 1$, 即 $\frac{a^2-1}{a^4} = \frac{3}{16}$,

所以 $3a^4 - 16a^2 + 16 = 0$, 解得 $a^2 = 4$ 或 $a^2 = \frac{4}{3}$.

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 或 $\frac{3x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) 设 $F_2(c, 0)$, $A(x_1, y_1)$, 则 $F_1(-c, 0)$, $B(-x_1, -y_1)$,

故 $M(\frac{x_1-c}{2}, \frac{y_1}{2})$, $N(\frac{-c-x_1}{2}, -\frac{y_1}{2})$.

①由题意, 得 $\vec{OM} \cdot \vec{ON} = 0$. 化简, 得 $x_1^2 + y_1^2 = c^2$,

$\vec{AF_1} \cdot \vec{AF_2} = (-c-x_1, -y_1)(c-x_1, -y_1) = x_1^2 + y_1^2 - c^2 = 0$ (定值).

②由题意 $\begin{cases} y_1 = kx_1, \\ \frac{x_1^2}{a^2} + y_1^2 = 1, \\ x_1^2 + y_1^2 = c^2 \end{cases}$ 得到 $k^2(a^4 - 2a^2) = 1$.

因为 $k \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$, 所以 $a^4 - 2a^2 = \frac{1}{k^2} \in (0, 3]$,

即 $0 < a^4 - 2a^2 \leq 3$, 解得 $2 < a^2 \leq 3$. 所以 $e^2 = 1 - \frac{1}{a^2} \in (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$,

所以 e 的取值范围是 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{3}]$.

20. 解: (1) 当 $a = 1$ 时, $f(x) = x - \frac{1}{x}$, $f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$ 2 分

$f(2) = \frac{3}{2}$, $f'(2) = \frac{5}{4}$ 所以, 函数 $f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线方程为 $y - \frac{3}{2} = \frac{5}{4}(x - 2)$

即: $5x - 4y - 4 = 0$ 4 分

(2) 函数的定义域为: $\{x | x \neq 0\}$

$f'(x) = a - \frac{a-2}{x^2} = \frac{ax^2 + (2-a)}{x^2} (a > 0)$ 6 分

当 $0 < a \leq 2$ 时, $f'(x) \geq 0$ 恒成立, 所以, $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上单调递增

当 $a > 2$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 即: $ax^2 + 2 - a = 0$, $x_1 = -\sqrt{\frac{a-2}{a}}$, $x_2 = \sqrt{\frac{a-2}{a}}$

$f'(x) > 0$, $x > x_2$ 或 $x < x_1$; $f'(x) < 0$, $x_1 < x < 0$ 或 $0 < x < x_2$,

所以, $f(x)$ 单调递增区间为 $(-\infty, -\sqrt{\frac{a-2}{a}})$ 和 $(\sqrt{\frac{a-2}{a}}, +\infty)$, 单调减区间为

$(-\sqrt{\frac{a-2}{a}}, 0)$ 和 $(0, \sqrt{\frac{a-2}{a}})$ 10 分

(3) 因为 $f(x) \geq 2 \ln x$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立, 有 $ax + \frac{a-2}{x} + 2 - 2a - 2 \ln x \geq 0 (a > 0)$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立.

所以, 令 $g(x) = ax + \frac{a-2}{x} + 2 - 2a - 2\ln x$,

则 $g'(x) = a - \frac{a-2}{x^2} - \frac{2}{x} = \frac{ax^2 - 2x - a + 2}{x^2} = \frac{(x-1)[ax + (a-2)]}{x^2}$.

令 $g'(x) = 0$, 则 $x_1 = 1, x_2 = -\frac{a-2}{a}$

若 $-\frac{a-2}{a} = 1$, 即 $a = 1$ 时, $g'(x) \geq 0$, 函数 $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 又 $g(1) = 0$

所以, $f(x) \geq 2\ln x$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立;

若 $-\frac{a-2}{a} > 1$, 即 $a < 1$ 时, 当 $x \in (0, 1), (-\frac{a-2}{a}, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0, g(x)$ 单调递增;

当 $x \in (1, -\frac{a-2}{a})$ 时, $g'(x) < 0, g(x)$ 单调递减

所以, $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上的最小值为 $g(-\frac{a-2}{a})$,

因为 $g(1) = 0$, 所以 $g(-\frac{a-2}{a}) < 0$ 不合题意.

$-\frac{a-2}{a} < 1$, 即 $a > 1$ 时, 当 $x \in (0, -\frac{a-2}{a}), (1, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0, g(x)$ 单调递增,

当 $x \in (-\frac{a-2}{a}, 1)$ 时, $g'(x) < 0, g(x)$ 单调递减,

所以, $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上的最小值为 $g(1)$

又因为 $g(1) = 0$, 所以 $f(x) \geq 2\ln x$ 恒成立

综上知, a 的取值范围是 $[1, +\infty)$.

.....16 分