多元变量的最值问题

一、热身练习：

1. 函数 $f\left(x\right)=x+\dfrac{9}{2x-2}\left(x>1\right)$ 的最小值是________.

2.已知实数 x， y 满足 $\begin{cases} y\geq x, \\ x+y\leq 2, \\ x\geq 0, \end{cases}$ 则 $z=9^{x}\cdot 3^{y}$ 的最大值是**__________**.

3. 设 $a>0,b>0,2a+b=ab$，则 $a+2b$ 的最小值为**__________**

4.已知正实数 x,y 满足 $x+y=xy$，则 $\dfrac{\mathbf{3}x}{x-\mathbf{1}}+\dfrac{\mathbf{2}y}{y-\mathbf{1}}$ 的最小值为______.

5.设实数 x,y 满足 $x^{2}+(y-1)^{2}=1$，当 $x+y+c\geq 0$ 时， c 的取值范围为______.

6.设正实数 x,y,z 满足 $x^{2}-3xy+4y^{2}-z=0$，则当 $\dfrac{z}{xy}$ 取得最大值时， $x+2y-z$ 的最大值为_________

二、典例研究：

例.已知正实数 x，y 满足 $x^2+xy-2y^2=1$，则 $5x-2y$ 的最小值为_______.

三、巩固训练：

1. 已知 $x>0, y>0$，且 $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=1$，若 $x+2y>m^2+2m$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是________________.

2.已知 $x<0$，且 $x-y=1$，则 $x+\frac{1}{2y+1}$ 的最大值是____.

3.已知 $a>0, b>0, ab=8,$ 则当 a 的值为________时 $\log_2 a \cdot \log_2(2b)$ 取得最大值.

4.已知正数 a，b，c 满足 $3a-b+2c=0$，则 $\frac{\sqrt{ac}}{b}$ **错误!未找到引用源。**的最大值为______.

5.若不等式 $2y^2-x^2 \ge c(x^2-xy)$ 对任意满足 $x>y>0$ 的实数 x, y 恒成立，则实数 c 的最大值为______

6.若实数 x, y 满足 $x>y>0,$ 且 $\frac{1}{x-y}+\frac{4}{x+2y}=1,$ 则 $x+y$ 的最小值为________

7.若 $x, y \in \mathbf{R}$，$x^2+2xy-3y^2=1$,则 $z=x^2+y^2$ 的最小值为___

8.设 a,b,c 是正实数，满足 $b+c \ge a$，则 $\frac{b}{c}+\frac{c}{a+b}$ 的最小值为________.

9.对一切实数 x, 二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a<b)$ 的值均为非负数，则 $\frac{b-a}{a+b+c}$ 的最大值为_____

10.已知 $(2xy-1)^2=(y-1)(5y+1)$，求 $x+\frac{1}{2y}$ 的最小值______________

专题知识梳理

对于多元变量的最值或范围问题，通过上述例题及变式的分析，梳理出如下的解答策略.

1. 减少变元. 既然是多“元”，那么基本思路自然是减少变量（减元），往往是通过消元，将多元问题转化为一元或二元问题，再用不等式或函数方程知识求解（如例 1 的变式），便于快速找到解题途径. 消元的过程，就是一个对条件进行化简、变形、配凑、拆分的过程，消元的方法主要有（1）利用等量关系消元，有的问题还需要进行放缩消元；（2）齐次式；（3）把变量都要同一个参数来表示，即利用参数方程来统一变量，常用于双曲线型或椭圆（圆）形。

2. 整体代换. 面对一个形式复杂或不易发现思路的问题，可以尝试整体换元，有的是给两个分母分别换元，有的是把某一个整体结构换成一个元，有时换元后还要进行二次、三次换元，这样便于把分散的条件联系起来，使隐含的条件显露出来，将问题转化成 $ax+\frac{b}{x}$型（倒数型）结构等，再利用基本不等式解决问题. 但换元一定要注意前后元的等价性，及时注明新元的范围. 换元法体现了整体思想，利用此整体代换，既容易获得解题思路，也能达到简化运算的目的；有时通过整体凑配也能达到简化的目的（如例 2 的变式）.

3. 消除差异. 解题差异论认为，解题的过程就是消除条件与条件，条件与结论之间差异的过程，需要我们注意观察，依据形式特点和结构特征，要消除条件与目标之间的差异，消除整体与局部的差异，消除不同（函数）名、不同角、不同次数的差异. “消除差异”是解决代数、三角中一些重、难点问题的利器. 可见，消元法是消除差异的手段之一.

4. 转换角度. 在分析、解决问题的过程中，当用某种思路解答遇到困难时，不妨换个角度，可能柳暗花明又一村，常见的思路有数形转换、正反转换，将代数、平面几何、三角等问题转换为解析几何问题，这样不仅有益于拓宽解题思路，还能克服思维定势.