破解动点轨迹长度问题的几种策略

重庆市忠县中学校 (403305) 张 侣

新课程标准的实施与推进,具有新颖性,开放性,探索性,交汇性等于一体的问题成为了教师在课堂教学中关注的焦点. 求解立体几何中动点轨迹的长度问题,不仅能激发学生参与课堂的积极性,还培养了学生空间直观想象,逻辑推理,数学运算等核心素养. 本文结合实例,就破解立体几何中动点轨迹的长度问题,给出几种常见的破解策略,供参考.

1、利用面面平行破解动点轨迹的长度问题

例1 在正四棱锥 $S-ABCD$(顶点 S 在底面 $ABCD$ 上的射影是正方形 $ABCD$ 的中心)中,底边长为2,高为 $2\sqrt{3}$,E 是 BC 的中点,点 P 在表面上运动,总是保持 $PE\perp AC$. 则动点 P 的轨迹长度是________.

分析: 根据题目条件可知,恒有 $AC\perp$ 平面 BSD 成立,为了保持 $PE\perp AC$ 的关系,则点 P 运动的轨迹所形成的平面必与平面 BSD 保持平行,从而确定了点 P 的轨迹长度就是 ΔMNE 的周长.

解: 如图1所示,当 P 在 ΔMNE 边上运动时,总是保持 $PE\perp AC$. 理由如下:在正四棱锥 $S-ABCD$ 中,有 $SO\perp$ 平面 $ABCD$,又因为 $AC\subseteq$ 平面 $ABCD$,则 $SO\perp AC$. 而四边形 $ABCD$ 为正方形,则 $BD\perp AC$. 又因为 $SO\cap BD=O$,所以 $AC\perp$ 平面 BSD. 取 SC,CD 的中点分别为 M,N,且 E 是 BC 的中点,易证平面 $BSD//$平面 MNE. 根据面面平行,可获得 $AC\perp$ 平面 MNE,而点 P 在 ΔMNE 边上运动,从而始终有 $PE\perp AC$. 则动点 P 的轨迹长度即为 ΔMNE 的周长,由题设知,ΔMNE 的周长为 ΔBSD 的周长的一半. 因为四边形 $ABCD$ 是边长为2的正方形,所以 $BD=2\sqrt{2}$,又因为 $SO=2\sqrt{3}$,且 $BO=\sqrt{2}$,所以 $SB=SD=\sqrt{OB^2+SO^2}=\sqrt{14}$,即 ΔBSD 的周长为 $2\sqrt{2}+2\sqrt{14}$. 进而可知,动点 P 的轨迹的长度是 $\sqrt{2}+\sqrt{14}$. 故答案填 $\sqrt{2}+\sqrt{14}$.

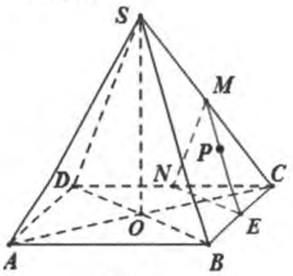

图1

变式 在棱长为1的正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中,M,N 分别是 AC',$A'B'$的中点. 点 P 在正方体的表面上运动,总能保持 $MP\perp BN$. 则动点 P 的轨迹长度是________.

解: 如图2所示,易知动点 P 的轨迹长度为矩形 $AEFD$ 的周长. 理由如下:取 E,F 为 BB'和 CC'的中点,在正方形 $ABB'A'$ 中,因为 E,N 是中点,所以易证 $AE\perp BN$. 在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中,$BC\perp$ 平面 $ABB'A'$,因为 $BC//EF$,所以 $EF\perp$ 平面 $ABB'A'$,又因为 $BN\subseteq$ 平面 $ABB'A'$,所以 $EF\perp BN$,又因为 $AE\cap EF=E$,所以 $BN\perp$ 平面 $AEFD$. 现将平面 $AEFD$ 向上平移至多点 M 即可,此时当点 P 在四边形 $HJKL$ 边界上运动时,总能保持 $MP\perp BN$. 显然,点 P 的轨迹长度为矩形 $AEFD$ 的周长. 易求得矩形 $AEFD$ 的周长为 $2+\sqrt{5}$. 故答案填 $2+\sqrt{5}$.

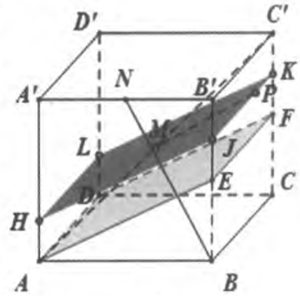

图2

点评: 以上破解过程,关键是为了保持某定直线始终与动直线的垂直关系,需借助线面垂直的相关性质进行破解,结合面面平行关系获得线线垂直的结论,再根据运动轨迹的类型求其长度.

2、利用线面垂直破解动点轨迹的长度问题

例2 (2020年新高考I山东卷第16题改编)已知直四棱柱 $ABCD-A'B'C'D'$ 的棱长均为2,$\angle BAD=60°$. P 是侧面 $BCC'B'$ 内的动点,且 $D'P=\sqrt{5}$. 则动点 P 的轨迹长度是________.

分析: 此题以直四棱柱 $ABCD-A'B'C'D'$ 为载体,通过立体几何的辅助线的构造来寻找问题解决的突破口. 借助几何元素之间的位置关系,探究动点 P 在侧面 $BCC'B'$ 内的运动轨迹就是扇形 MEF 的弧 EF,进一步利用平面几何的相关知识来确定弧长所对应的圆心角大小,再结合弧长公式来求解轨迹长度.

解: 如图3所示,动点 P 的轨迹长度就是弧长 EF. 理由如下:取 $B'C'$ 的中点为 M,BB' 的中点为 E,CC' 的中点为 F,在直四棱柱 $ABCD-A'B'C'D'$ 中,因为 $\angle BAD=60°$ 且各棱长均为2,所以 $\Delta B'C'D'$ 为等边三角形,所以 $D'M=\sqrt{3}$,$D'M\perp B'C'$. 由题设知 $BB'\perp$ 平面 $A'B'C'D'$,因为 $D'M\subseteq$ 平面 $A'B'C'D'$,所以 $BB'\perp D'M$,又因为 $BB'\cap B'C'=B'$,所以 $D'M\perp$ 平面 $BCC'B'$,从而知 $\Delta D'MP$ 为直角三角形,进而由 $D'P=\sqrt{5}$ 可知,$MP=\sqrt{2}$,所以动点 P 的轨迹是以点 M 为圆心,半径为 $\sqrt{2}$ 的圆在正方形

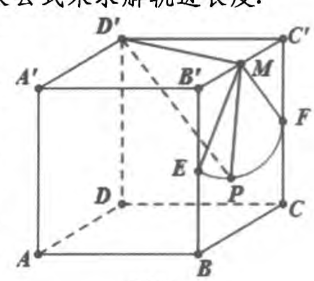

图3

$BCC'B'$内的弧长 EF. 因为$\angle EMB'=\angle FMC'=\frac{\pi}{4}$，所以$\angle EMF=\frac{\pi}{2}$. 所以根据弧长计算公式可得弧$\overset{\frown}{EF}=\frac{\pi}{2}\cdot\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$. 故答案填$\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$.

变式　在三棱锥 $A-BCD$ 中，$\angle BAD=90°$，$AD\perp BC$，$AD=4$，$AB=AC=2\sqrt{3}$，$\angle BAC=120°$. 若点 P 为ΔABC 内的动点，且满足直线 DP 与平面 ABC 所成角的正切值为 2. 则动点 P 在ΔABC 内所成的轨迹长度是________.

解：如图 4 所示，动点 P 在ΔABC 内的轨迹长度是弧长 ME 与弧长 NF 之和. 理由如下：因为$\angle BAD=90°$，所以 $AD\perp AB$，而 $AD\perp BC$ 且 $AB\cap BC=B$，所以 $AD\perp$平面 ABC，从而知ΔAPD 为直角三角形. 因为直线 DP 与平面 ABC 所成角的正切值为 2，且 $AD=4$，所以 $AP=2$. 取 H 为 BC 的中点，因为 $AB=AC=2\sqrt{3}$，$\angle BAC=120°$，所以 $AH\perp BC$ 且 $AH=\sqrt{3}$. 因为$\sqrt{3}<AP<2\sqrt{3}$，所以动点 P 在ΔABC 内的轨迹长度是弧长 ME 与弧长 NF 之和. 因为 $AE=2$，$AH=\sqrt{3}$，所以 $EH=1$，即 $EF=2$，则ΔAEF 为等边三角形. 因为 $EAF=\frac{\pi}{3}$，易求得$\angle MAE+\angle NAF=\frac{\pi}{3}$，所以点 P 在ΔABC 内的轨迹长度为 $l=\alpha R=\frac{\pi}{3}\cdot 2=\frac{2\pi}{3}$. 故答案填$\frac{2\pi}{3}$.

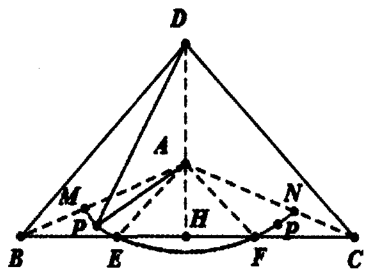

图 4

点评：以上破解过程，关键是借助已知条件和轨迹定义来寻找动点的轨迹路径，利用几何元素本身具有的位置关系，探究动点的轨迹长度.

3、利用解析法破解动点轨迹的长度问题

例 3　如图 5 所示，在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 是棱 BB_1 的中点，P 是底面 $ABCD$ 内的动点，且满足$\angle APA_1=\angle BPE$，则动点 P 形成的轨迹长度是________.

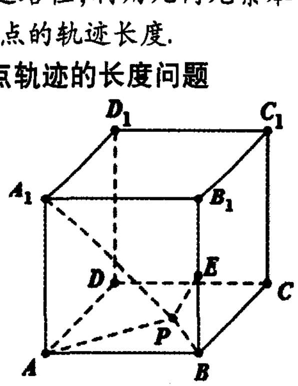

图 5

分析：根据题目条件中等式$\angle APA_1=\angle BPE$ 恒成立的信息，转化为相应地线段比值问题. 建立相应的直角坐标系，探究动点 P 的轨迹方程，根据轨迹方程判断点 P 的轨迹类型，利用相关知识，再结合轨迹类型求其轨迹长度.

解：如图 6 所示，动点 P 在正方形 $ABCD$ 内形成的轨迹为以 O_1 为圆心，以 O_1M 为半径的圆弧长 MN. 理由如下：在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 是棱 BB_1 的中点，P 是底面 $ABCD$ 内的动点，有 $\tan\angle APA'=\frac{AA'}{PA}$，$\tan\angle BPE=\frac{BE}{PB}$，因为$\angle APA_1=\angle BPE$，所以 $PA=2PB$. 在正方形 $ABCD$ 所在平面内，以线段所在的直线为 x 轴，以 AB 垂直平分线为 y 轴，建立直角坐标系，如图 6. 此时，$A(-1,0)$，$B(1,0)$，设 $p(x,y)$，由 $PA=2PB$ 可得点 P 的轨迹方程为$(x-\frac{5}{3})^2+y^2=\frac{16}{9}$，由轨迹方程及题意可知，动点 P 在正方形 $ABCD$ 内的轨迹是以 $O_1(\frac{5}{3},0)$为圆心，以$\frac{4}{3}$为半径的圆弧长 MN. 易求得 $O_1B=\frac{2}{3}$，而 $O_1N=\frac{4}{3}$，可获得$\angle BO_1N=\frac{\pi}{3}$. 则点 P 在正方形 $ABCD$ 内的轨迹长度为 $l=\alpha R=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{4}{3}=\frac{4\pi}{9}$. 故答案填$\frac{4\pi}{9}$.

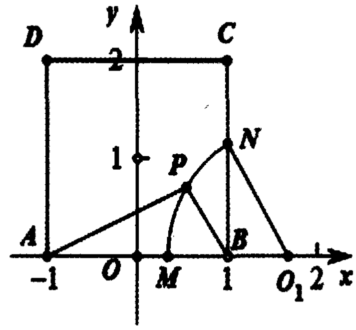

图 6

变式　在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，E，F 分别是棱 $A'B'$，BC 上的动点，且 $A'E=BF$，P 为 EF 的中点，则点 P 形成的轨迹长度是________.

解：以 D 为坐标原点，建立如图 7 所示的空间直角坐标系，设点 $P(x,y,z)$，设 $A'E=BF=k$，则 $E(2,k,2)$，$E(2-k,2,0)$，因为 P 为 EF 的中点，所以 $x=\frac{2+2-k}{2}$，$y=\frac{2+k}{2}$，$z=\frac{1}{2}$，消去参数 k，获得点 P 的轨迹方程为 $x+y-3=0$ $(z=\frac{1}{2})$，当点 E 与 A'重合，点 F 与 B 重合时，则点 P 与 $A'B$ 的中点 M 重合. 当点 E 与 B'重合，点 F 与 C 重合时，则点 P 与 $B'C$ 的中点 N 重合. 可知点 P 形成的轨迹长度为线段 MN，易求得线段 MN 的长为$\sqrt{2}$. 故答案填$\sqrt{2}$.

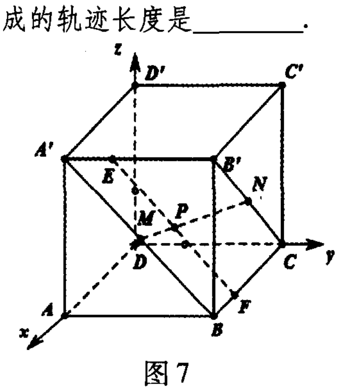

图 7

点评:以上求解的关键是通过建立直角坐标系,求解动点的轨迹方程,再结合问题给定的题设条件和轨迹方程类型,确定动点的轨迹路径,进而破解动点的轨迹长度.

综上可见,破解立体几何中动点轨迹的长度问题,关键就是充分分析与理解题设条件,利用定义确定动点的轨迹图形,再抓住图形的结构特征来判断动点的轨迹类型,进而借助相关的公式进行巧妙转化并求其长度.

参考文献

[1]王以清.空间轨迹问题的求解策略[J].数学通讯,2009(Z2):32-33.
[2]刘光红.空间中动点轨迹的长度[J].高中数学教与学,2015(01):8-10.
[3]吴成强,刘恒荣.立体几何中动点轨迹度量问题的探究[J].中学数学杂志,2018(03):36-40.

一道高联赛预赛题的加强

福建省福清第三中学 (350315) 何 灯

极值点偏移问题一直是高考乃至竞赛考查的热点,此类问题常见的求解方法有构造对称化函数、比值代换法、对数平均不等式法.其中比值代换法可以将函数零点用统一变量表示出来,使得该法不受待证不等式形式的束缚,故能证明形式较为复杂的问题,应用最为广泛.

2021 年高中数学联赛福建赛区预赛第 14 题是一道典型的极值点偏移问题,本文采用比值代换法对其进行探究,得到试题中不等式的一个加强.

试题呈现 已知$f(x)=e^x-x^a,x>0,a\in R$.

(1)若$f(x)\geqslant 0$恒成立,求a的最大值;

(2)若x_1,x_2是$f(x)$的两个零点,且$x_1>x_2$,求证:$x_1+x_2>2a$.

定理 函数$f(x)=e^x-x^a,x>0,a\in R,x_1,x_2$是$f(x)$的两个零点,则$x_1+x_2+4\sqrt{x_1x_2}>6a$.

证明:x_1,x_2是$f(x)$的零点,得$e^{x_1}-x_1^a=e^{x_2}-x_2^a=0$,从而$\begin{cases}e^{x_1}=x_1^a,\\ e^{x_2}=x_2^a,\end{cases}$方程两边取对数得$\begin{cases}x_1=a\ln x_1,\\ x_2=a\ln x_2,\end{cases}$两式相减得$x_1-x_2=a\ln x_1-a\ln x_2=a\ln\dfrac{x_1}{x_2}$.由对称性,设$x_1>x_2$,令$t=\dfrac{x_1}{x_2}(t>1)$,则$x_2(t-1)=a\ln t$,得$x_2=\dfrac{a\ln t}{t-1}$(由$x_2>0$及$t>1$可得$a>0$),$x_1=tx_2=\dfrac{at\ln t}{t-1}$,从而待证不等式等价于$a(1+4\sqrt{t}+t)\dfrac{\ln t}{t-1}>6a$,等价于$\ln t-\dfrac{6(t-1)}{1+4\sqrt{t}+t}>0$.

令$y=\sqrt{t}(y>1)$,则$\ln t-\dfrac{6(t-1)}{1+4\sqrt{t}+t}>0$等价于$\ln y-\dfrac{3(y^2-1)}{1+4y+y^2}>0$,令$F(y)=\ln y-\dfrac{3(y^2-1)}{1+4y+y^2}$,得$F'(y)=\dfrac{1}{y}-\dfrac{6y(1+4y+y^2)-3(y^2-1)(4+2y)}{(1+4y+y^2)^2}=\dfrac{(y-1)^4}{y(1+4y+y^2)^2}>0$,则$F(y)$关于$y$在$(1,+\infty)$上单调递增,得$F(y)>F(1)=0$,定理成立.

评注:定理中不等式若采用构造对称化函数或对数平均不等式法均较难证明,但采用比值代换法却能够轻松求解.由定理及基本不等式得$x_1+x_2>\dfrac{1}{3}(x_1+x_2)+\dfrac{4}{3}\sqrt{x_1x_2}>2a$,显然定理中的不等式强于原试题.

例析数学竞赛中复数的解题技巧

广东省惠州市第一中学 (516007) 刘志勇

近些年,复数在中学数学教材中日渐淡化,高考的考查也强调基础,但复数的内涵是非常丰富的,尤其在高中数学竞赛中,复数的考题常常涉及多种数学思想,而且技巧性强,灵活多变,因而受到竞赛命题专家的青睐.本文列举部分高中数学竞赛试题,以阐述数学竞赛中复数的解题技巧,供读者参考.