班级__________ 学号__________ 姓名__________ 得分__________

仪征中学2019届考前模拟卷（五）解析

测试报告

本套试卷测试后主要有以下三个方面的问题：(1)运用图形解题的意识不强，很多考生不能主动运用图形语言进行直观求解，在某些问题上花费大量时间，如第14题，部分考生不能通过函数的周期性、奇偶性准确作出函数的图象，通过数形结合解题；(2)考生对新颖的题目把握不到位，如第10题部分考生不能通过阅读算法流程图得到分段函数，数学思维品质需要进一步加强；(3)知识整合能力欠缺，压轴题得分率较低，如第13,14,19,20题等.

基于以上情况，建议后期备考从以下三个方面加强：(1)对于必考、必记、必会的内容和方法应重点复习、反复强化，做到成竹在胸；(2)重视学科思想的整理与应用，建议考生在老师的带领下认真领悟常见的数学思想方法，在训练和考试测评中主动反思，提高自己运用这些“武器”的意识和能力；(3)多进行解题反思，从自己的解题过程、试题的背景、方法的灵活应用、常见的易错问题等方面总结提高.

1. $\sqrt{2}$ 【命题意图】 本题考查复数的运算、复数的模，考查考生对基础知识的掌握情况.

【解题思路】 先进行复数的乘法运算，再利用模的计算公式求解.

【解析】 因为$z=(1+i)i=-1+i$，所以$|z|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$.

2. 4 【命题意图】 本题考查函数的定义域、集合的交运算、集合中元素的个数，考查考生的运算求解能力以及对基础知识的掌握情况.

【解题思路】 先求出集合B，再求集合$A\cap B$，从而可得$A\cap B$中元素的个数.

【解析】 因为$x-5\geq0$，即$x\geq5$，所以$B=\{x|y=\sqrt{x-5}\}=\{x|x\geq5\}$，又$A=\{2,4,5,6,8,12\}$，所以$A\cap B=\{5,6,8,12\}$，所以$A\cap B$中元素的个数为4.

3. 50 【命题意图】 本题考查分层抽样的知识，考查考生对基础知识的掌握情况.

【解题思路】 根据分层抽样的原理计算出各系抽取的人数，再计算总数即得结果.

【解析】 因为数学系、外语系、计算机系的人数之比为3:4:3，从计算机系中抽取15人，所以从数学系中抽取15人，从外语系中抽取20人，所以$n=15+20+15=50$，即n的值为50.

4. -18 【命题意图】 本题考查向量的线性运算、向量的数量积，考查考生的运算求解能力.

【解题思路】 根据向量垂直，得到数量积为0，然后利用坐标运算得到方程，即可得m的值.

【解析】 **解法一** 因为$\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(m,4)$，所以$2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(m+2,8)$.因为$\boldsymbol{a}\perp(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，所以$\boldsymbol{a}\cdot(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=m+2+16=0$，所以$m=-18$.

解法二 因为$\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(m,4)$，所以$\boldsymbol{a}^2=5$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=m+8$.因为$\boldsymbol{a}\perp(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，所以$\boldsymbol{a}\cdot(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=10+m+8=0$，所以$m=-18$.

5. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ 【命题意图】 本题考查两角和的正弦公式、三角函数的最小正周期、特殊角的三角函数值等，考查考生的运算求解能力.

【解题思路】 先利用函数的最小正周期求出ω的值，再把$\frac{\pi}{8}$代入求解.

【解析】 因为函数$f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})(\omega>0)$的最小正周期为$\pi$，所以$\omega=2$，所以$f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$，所以$f(\frac{\pi}{8})=\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6})=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

6. $\frac{1}{2}$ 【命题意图】 本题考查古典概型及其概率计算公式的应用，考查考生的运算求解能力.

【解题思路】 在解题过程中，先根据古典概型的定义判断出所求概率是否为古典概型，然后根据条件求出所有的基本事件总数n，以及所求事件A所包含的基本事件数m，最后根据古典概型的概率计算公式$P(A)=\frac{m}{n}$计算即可.

【解析】 将一个棱长为4的正四面体锯成棱长为2的小正四面体，共可以得到8个小正四面体，其中三面涂有红色的小正四面体原来应该位于大正四面体的顶点处，所以共有4个，故从中任取一个小正四面体，这一个小正四面体三面涂有红色的概率$P=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$.

【解后反思】 本题虽为古典概型题，但对考生的空间想象能力也有一定的要求，主要体现在以下两点：(1)可以分析出将一个棱长为4的正四面体锯成棱长为2的小正四面体，共可以得到8个小正四面体；(2)可以想象到三面涂有红色的小正四面体原来应该位于大正四面体的顶点处.

7. $\sqrt{3}$ 【命题意图】 本题考查扇形的面积公式、锥体的结构特征、锥体的底面面积与侧面积等，考查考生的运算求解能力以及空间想象能力.
【解题思路】 先表示出圆锥的底面面积和侧面展开图(即扇形)的面积，再根据已知条件列出等式，求之可得结果.
【解析】 因为圆锥的底面面积是πr^2，侧面展开形成的扇形的面积是$\pi r\sqrt{h^2+r^2}$，又侧面展开图的面积是底面面积的2倍，所以$\frac{\pi r\sqrt{h^2+r^2}}{\pi r^2}=2$，得$h^2+r^2=4r^2$，$h^2=3r^2$，所以$\frac{h}{r}=\sqrt{3}$.

8. 68 【命题意图】 本题考查等比数列的性质、等差数列的前n项和公式的应用，考查考生对数列基础知识的掌握情况.
【解题思路】 由$a_6=a_2\cdot a_{10}$得a_6，进而得b_9，最后由等差数列的前n项和公式求得S_{17}.
【解析】 **通解** 数列$\{a_n\}$是公比为2的等比数列，设公比为q，由$a_6=a_2\cdot a_{10}$得$a_1q^5=a_1q\cdot a_1q^9$，$\therefore a_1q^5=1$，$\therefore a_6=1$，$\therefore b_9=2a_7=2a_6\times q=2\times1\times2=4$，设等差数列$\{b_n\}$的公差为$d$，则等差数列$\{b_n\}$的前17项和$S_{17}=17b_1+\frac{17\times16}{2}d=17(b_1+8d)=17b_9=68$.
优解 $\because$数列$\{a_n\}$是公比为2的等比数列，$a_6=a_2\cdot a_{10}$，$\therefore$由等比数列的性质得$a_6=a_2\cdot a_{10}=a_6^2$，$\therefore a_6=1$，$\therefore b_9=2a_7=2a_6\times2=4$，$\therefore$等差数列$\{b_n\}$的前17项和$S_{17}=\frac{17(b_1+b_{17})}{2}=17b_9=68$.

9. $[\frac{1}{8},\frac{1}{2}]$ 【命题意图】 本题旨在考查双曲线的基本概念及标准方程，考查直线的斜率，考查考生的逻辑推理能力及运算求解能力.
【解题思路】 先设出点M,N,P的坐标，表示出直线PM,PN的斜率，利用点在双曲线上得$k_{PM}\cdot k_{PN}=\frac{1}{4}$，再利用直线$PM$的斜率的取值范围即可求解.
【解析】 设$M(x_0,y_0)$，$N(-x_0,-y_0)$，$P(m,n)(m\neq\pm x_0,n\neq\pm y_0)$，则$k_{PM}=\frac{n-y_0}{m-x_0}$，$k_{PN}=\frac{n+y_0}{m+x_0}$. 因为$P,M,N$均在双曲线$\frac{x^2}{4}-y^2=1$上，所以$\frac{m^2}{4}-n^2=1$，$\frac{x_0^2}{4}-y_0^2=1$，相减得$\frac{(m-x_0)(m+x_0)}{4}-(n-y_0)(n+y_0)=0$，$\frac{n-y_0}{m-x_0}\cdot\frac{n+y_0}{m+x_0}=\frac{1}{4}$，即$k_{PM}\cdot k_{PN}=\frac{1}{4}$，又$\frac{1}{2}\leqslant k_{PM}\leqslant2$，即$\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{4k_{PN}}\leqslant2$，解得$\frac{1}{8}\leqslant k_{PN}\leqslant\frac{1}{2}$.

【解后反思】 若M,N为双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$上关于坐标原点对称的两点，$P$为双曲线上任意一点(异于$M,N$)，则$k_{PM}\cdot k_{PN}=\frac{b^2}{a^2}$. 反之，若平面上的动点$P$与两定点$M,N$的斜率之积为正定值，则$P$的轨迹为双曲线(不包括$M,N$).

10. 90 【命题意图】 本题将实际问题与算法流程图相结合，主要考查条件结构、分段函数的知识，意在考查考生的运算求解能力.
【解题思路】 解题的关键是写出y随x变化的解析式.
【解析】 依题意可得$y=\begin{cases}6\ 000x,x\leqslant80,\\6\ 000\times0.95x,80<x\leqslant120,\\6\ 000\times0.85x,x>120,\end{cases}$令$6\ 000x=513\ 000$，解得$x=85.5$，不合题意，舍去；令$6\ 000\times0.95x=513\ 000$，解得$x=90$；令$6\ 000\times0.85x=513\ 000$，解得$x\approx100.6$，不合题意，舍去. 故一次采购该智能手机90部.

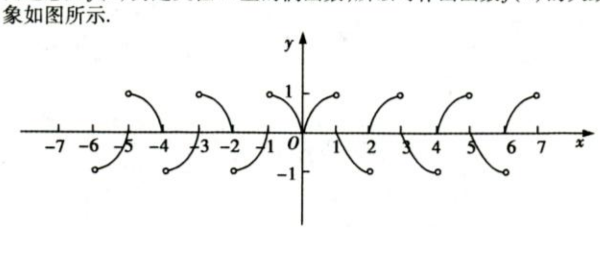
【解后反思】 解决算法流程图试题应该注意三个方面：一是弄清判断框内的条件是由计数变量还是累计变量表示的；二是要注意判断框内的不等式是否含有等号，这直接决定循环的次数；三是要准确利用算法流程图中的赋值语句与两个变量之间的关系，把握算法流程图的整体功能，这样可以直接求解结果，减少运算的次数.

11. -1 【命题意图】 本题考查与导数有关的函数的图象与性质，函数的单调性，考查考生分析问题、解决问题的能力.
【解题思路】 先根据函数图象判断$y=(1-x)f'(x)$的正负，再判断出$f'(x)$的正负，进而判断出$f(x)$的单调性，最后即可得$f(x)$的极值点.
【解析】 根据函数$y=(1-x)f'(x)$的图象知，当$x<-1$时，$y=(1-x)f'(x)<0$，$1-x>0$，$f'(x)<0$，函数$f(x)$在$(-\infty,-1)$上单调递减，当$-1<x<1$时，$y=(1-x)f'(x)>0$，$1-x>0$，$f'(x)>0$，函数$f(x)$在$(-1,1)$上单调递增，当$x>1$时，$y=(1-x)f'(x)<0$，$1-x<0$，$f'(x)>0$，函数$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，所以$x=-1$是$f(x)$的极小值点，且$f(x)$在$(-4,2)$上无极大值点，所以$f(x)$在$(-4,2)$上的所有极值点之和为-1.

12. 7 【命题意图】 本题考查直线的倾斜角与斜率的关系，圆的标准方程，直线与圆的位置关系.
【解题思路】 先由$\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$结合直线的倾斜角求出$m$，再求出圆$C$的标准方程，最后根据圆$C$的圆心在直线$l_2$上得出弦长即直径，即可求出$p$，即得结果.
【解析】 由直线$l_1:x-2y+1=0$的倾斜角为α，得直线l_1的斜率$k_1=\tan\alpha=\frac{1}{2}$，由直线$l_2:x-my+1=0$的倾斜角为$\beta$，满足$\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$，得直线$l_2$的斜率$k_2=\frac{1}{m}=\tan\beta=\tan(\frac{\pi}{4}-\alpha)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\alpha}{1+\tan\alpha\cdot\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}\times1}=\frac{1}{3}$，即$m=3$，则$l_2:x-3y+1=0$. 又圆$C$的标准方程为$(x-2)^2+(y-1)^2=p+5$，由此可知直线$l_2:x-3y+1=0$过圆$C$的圆心，即所截弦长$6=2\sqrt{p+5}$，即$p=4$. 所以$m+p=7$.

13. 6 【命题意图】 本题考查正弦定理、余弦定理、换元法、基本不等式、利用导数求函数的最值等，考查考生的运算求解能力以及分析问题和解决问题的能力.
【解题思路】 **解法一** 先利用正弦定理将边化成角，再利用函数的单调性求最值. **解法二** 先利用余弦定理得到a,b之间的关系式，换元之后利用基本不等式得到结果.
【解析】 **解法一** 在$\triangle ABC$中，由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sin C}$，所以$a=\frac{2\sqrt{3}\sin A}{\sin C}$，$b=\frac{\sqrt{3}}{\sin C}$.
所以$a+2b=\frac{2\sqrt{3}\sin A}{\sin C}+\frac{2\sqrt{3}}{\sin C}=\frac{2\sqrt{3}\sin(B+C)}{\sin C}+\frac{2\sqrt{3}}{\sin C}=\frac{2\sqrt{3}\sin(\frac{\pi}{6}+C)}{\sin C}+\frac{2\sqrt{3}}{\sin C}=\sqrt{3}(\sqrt{3}+\frac{\cos C+2}{\sin C})$. 因为$B=\frac{\pi}{6}$，所以$C\in(0,\frac{5\pi}{6})$.
记$y=\frac{\cos C+2}{\sin C}$，$C\in(0,\frac{5\pi}{6})$. 因为$y'=\frac{-1-2\cos C}{\sin^2C}$，所以在$(0,\frac{2\pi}{3})$上，$y'<0$，$y=\frac{\cos C+2}{\sin C}$单调递减，在$(\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{6})$上，$y'>0$，$y=\frac{\cos C+2}{\sin C}$单调递增，因此$C=\frac{2\pi}{3}$时，$y=\sqrt{3}$，是极小值，也是最小值，所以$a+2b$的最小值为6.
解法二 在$\triangle ABC$中，由余弦定理$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，得$b^2=a^2+12-6a$，所以$b^2-(a-3)^2=(b+a-3)(b-a+3)=3$，
设$b+a-3=t(t>0)$，$b-a+3=\frac{3}{t}$，则$a=\frac{t}{2}-\frac{3}{2t}+3$，$b=\frac{1}{2}(t+\frac{3}{t})$，所以$a+2b=\frac{t}{2}-\frac{3}{2t}+3+t+\frac{3}{t}=\frac{3t}{2}+\frac{3}{2t}+3\geqslant2\sqrt{\frac{3t}{2}\times\frac{3}{2t}}+3=6$，当且仅当$t=1$，即$a=b=2$时等号成立，所以$a+2b$的最小值为6.

14. $[\frac{1}{6},\frac{1}{5})$ 【命题意图】 本题主要考查函数的奇偶性、周期性、对称性，方程的解等知识，考查化归与转化思想、数形结合思想.
【解题思路】 解题时，先由函数的基本性质得函数$f(x)$的解析式，然后作出函数$f(x)$的图象，将方程的解转化为直线与函数图象的交点，数形结合便可以得到不等式组，进而求解即可.
【解析】 因为当$x\geqslant0$时，有$f(x+1)=-f(x)$，所以$f(x+2)=-f(x+1)=f(x)$，所以函数$f(x)$在$[0,+\infty)$上是周期函数. 又当$x\in[1,2)$时，$x-1\in[0,1)$，有$f(x-1)=\log_2x$，所以$f(x)=f((x-1)+1)=-f(x-1)\Rightarrow f(x-1)=-f(x)=\log_2x\Rightarrow f(x)=-\log_2x$，即$f(x)=\begin{cases}\log_2(x+1),x\in[0,1),\\-\log_2x,x\in[1,2),\end{cases}$
由题意知$f(x)$为定义在$\mathbf{R}$上的偶函数，所以可作出函数$f(x)$的大致图象如图所示.



方程$f(x)-kx=0$恰有5个不同的实数解，即函数$y=f(x)$的图象与直线$y=kx$有5个不同的交点，所以$\begin{cases}5k<1,\\7k\geqslant 1,\\-4k>-1,\\-6k\leqslant -1,\end{cases}$解得$\frac{1}{6}\leqslant k<\frac{1}{5}$，所以$k$的取值范围是$[\frac{1}{6},\frac{1}{5})$.

【解题关键】 求解本题的关键主要有以下三个方面：(1)判断出函数$f(x)$在$[0,+\infty)$上是周期函数；(2)结合函数$f(x)$为偶函数，作出函数在**R**上的大致图象；(3)将方程的实数解问题转化为函数图象的交点问题，数形结合得到不等式组.

15.【命题意图】 本题考查同角三角函数的基本关系、两角和与差的三角函数公式，考查考生的运算求解能力以及思维的灵活性.

【解题思路】 第(1)问，先根据条件求出$\sin\alpha$和$\cos\beta$的值，然后利用两角和的余弦公式求出$\cos(\alpha+\beta)$，再求$\alpha+\beta$的值，也可以先求出$\tan\alpha$和$\tan\beta$的值，然后利用两角和的正切公式求出$\tan(\alpha+\beta)$，再求$\alpha+\beta$的值；第(2)问，可以直接把$\tan(\alpha+\theta)$展开求解，也可以利用$\tan\theta=\tan(\alpha+\theta-\alpha)$求解.

解：(1)**解法一** 因为α为锐角，且$\cos\alpha=\frac{5\sqrt{26}}{26}$，

所以$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{\sqrt{26}}{26}$. (2分)

因为β为锐角，且$\sin\beta=\frac{2\sqrt{13}}{13}$，

所以$\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\frac{3\sqrt{13}}{13}$. (4分)

所以$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{5\sqrt{26}}{26}\times\frac{3\sqrt{13}}{13}-\frac{\sqrt{26}}{26}\times\frac{2\sqrt{13}}{13}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, (6分)

又α,β为锐角，

所以$\alpha+\beta\in(0,\pi)$，所以$\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$. (8分)

解法二 因为α为锐角，且$\cos\alpha=\frac{5\sqrt{26}}{26}$，

所以$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{\sqrt{26}}{26}$，$\tan\alpha=\frac{1}{5}$. (2分)

因为β为锐角，且$\sin\beta=\frac{2\sqrt{13}}{13}$，

所以$\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\frac{3\sqrt{13}}{13}$，$\tan\beta=\frac{2}{3}$. (4分)

所以$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{1}{5}+\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{5}\times\frac{2}{3}}=1$， (6分)

又α,β为锐角，

所以$\alpha+\beta\in(0,\pi)$，所以$\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$. (8分)

(2)**解法一** 由(1)的解法二可得$\tan\alpha=\frac{1}{5}$，$\tan\beta=\frac{2}{3}$，因为$\tan(\alpha+\theta)=\tan\beta$，

所以$\tan(\alpha+\theta)=\frac{\tan\alpha+\tan\theta}{1-\tan\alpha\tan\theta}=\frac{\frac{1}{5}+\tan\theta}{1-\frac{1}{5}\times\tan\theta}=\frac{2}{3}$， (12分)

解得$\tan\theta=\frac{7}{17}$. (14分)

解法二 由(1)的解法二可得$\tan\alpha=\frac{1}{5}$，$\tan\beta=\frac{2}{3}$，即$\tan(\alpha+\theta)=\frac{2}{3}$，所以$\tan\theta=\tan(\alpha+\theta-\alpha)=\frac{\tan(\alpha+\theta)-\tan\alpha}{1+\tan(\alpha+\theta)\tan\alpha}=\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{5}}{1+\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}}=\frac{7}{17}$. (14分)

【名师指引】 在本题的求解过程中应注意根据题意恰当选用公式，这对解题很有帮助，如第(2)问若是选用两角和的正切公式，则需要先列出关于$\tan\theta$的等式，再进行求解；若是运用角的变换，转化为$\tan\theta=\tan(\alpha+\theta-\alpha)$求解，则可以一步到位.

16.【命题意图】 本题考查线面平行的判定定理、线面垂直和面面垂直的判定定理等，考查考生的空间想象能力、推理论证能力.

【解题思路】 第(1)问，利用三角形的中位线得到$OE\parallel PC$，进而证明线面平行；第(2)问，先利用$DE\perp CD$和$CD\parallel AB$得到$DE\perp AB$，再利用等腰三角形三线合一得到线线垂直，利用线面垂直的判定定理得到$DE\perp$平面PAB，从而证明平面$APD\perp$平面PAB.

解：(1)因为底面$ABCD$为平行四边形，O为AC与BD的交点，

所以O为AC的中点， (2分)

又E为侧棱PA的中点，

所以OE为$\triangle ACP$的中位线，所以$OE\parallel PC$， (4分)

因为$PC\subset$平面PCD，$OE\not\subset$平面PCD，

所以$OE\parallel$平面PCD. (7分)

(2)因为底面$ABCD$为平行四边形，所以$CD\parallel AB$，

又$DE\perp CD$，所以$DE\perp AB$. (9分)

因为$PD=AD$，E为棱PA的中点，所以$DE\perp AP$.

又$AP\subset$平面PAB，$AB\subset$平面PAB，$AP\cap AB=A$，

所以$DE\perp$平面PAB， (12分)

又$DE\subset$平面APD，所以平面$APD\perp$平面PAB. (14分)

【易错警示】 本题难度不大，但是很多考生却并不能得全分，原因在于解题步骤不规范，不完整，如第(1)问很多考生在得到$OE\parallel PC$后，直接得结论，而忽视了对"$PC\subset$平面PCD，$OE\not\subset$平面PCD"的说明，使得线面平行的判定定理的条件不全，失去一些步骤分. 在解题时，考生一定要注意思维的渐近性，不要跳跃，定理的条件要列举完整.

17.【命题意图】 本题考查导数的运算、一元二次不等式的解法等知识，考查考生的数学建模能力和利用数学知识解决实际问题的能力.

【解题思路】 (1)首先根据$OA=50$ m，$AB=(10+\frac{1}{2\,500a})$ m得到点B的坐标，代入抛物线的方程可得k关于a的函数表达式$k(a)$；(2)利用桥的最高点O_1距水面的距离$k(a)$不大于$\frac{201}{10}$ m，道路B_1P_1的坡度不大于$\frac{1}{200}$分别列出不等式，解不等式可得实数a的取值范围.

解：(1)因为$OA=50$ m，$AB=(10+\frac{1}{2\,500a})$ m，

所以当$x=50$时，$y=10+\frac{1}{2\,500a}$，

所以点B的坐标为$(50,10+\frac{1}{2\,500a})$. (2分)

将点B的坐标代入$y=-ax^2+k(a>0)$，

得$10+\frac{1}{2\,500a}=-2\,500a+k$， (4分)

所以$k=2\,500a+\frac{1}{2\,500a}+10$，即$k$关于$a$的函数表达式$k(a)=2\,500a+\frac{1}{2\,500a}+10(a>0)$. (5分)

(2)因为$y=-ax^2+k(a>0)$，

所以$y'=-2ax$，所以$y'|_{x=-50}=100a$， (7分)

因为道路B_1P_1的坡度不大于$\frac{1}{200}$，

所以$100a\leqslant\frac{1}{200}$，所以$a\leqslant\frac{1}{20\,000}$. (9分)

因为桥的最高点O_1距水面的距离$k(a)$不大于$\frac{201}{10}$ m，

所以$k(a)=2\,500a+\frac{1}{2\,500a}+10\leqslant\frac{201}{10}$， (11分)

化简得$(2\,500a-10)(2\,500a-\frac{1}{10})\leqslant 0$，

所以$\frac{1}{10}\leqslant 2\,500a\leqslant 10$，

所以$\frac{1}{25\,000}\leqslant a\leqslant\frac{1}{250}$. (13分)

综上可知，$\frac{1}{25\,000}\leqslant a\leqslant\frac{1}{20\,000}$，即实数$a$的取值范围为$[\frac{1}{25\,000},\frac{1}{20\,000}]$. (14分)

【名师指引】 正确求解实际应用题的前提是准确理解题意，有效提取题干信息，解题的关键是将文字语言转化为数学符号语言，建立数学模型，如本题第(2)问求解的关键是将题干中的信息转化为两个不等式：(1)将"道路B_1P_1的坡度不大于$\frac{1}{200}$"转化为"$100a\leqslant\frac{1}{200}$"；(2)将"桥的最高点$O_1$距水面的距离$k(a)$不大于$\frac{201}{10}$ m"转化为"$2\,500a+\frac{1}{2\,500a}+10\leqslant\frac{201}{10}$".

18.【命题意图】 本题考查直线的方程、椭圆的方程、直线和椭圆的位置关系，考查考生的运算求解能力以及分析问题和解决问题的能力.

【解题思路】 第(1)问，由左顶点坐标得到$a=2$，然后利用焦点到相应准线的距离为3，结合$a^2=b^2+c^2$求出b,c的值，即可得到椭圆C的方程；第(2)问，可设出直线AP的斜率，写出直线AP的方程，然后求出点

N,P,M 的坐标，从而得出 k_1,k_2，再求解，也可以设出点 P 的坐标，写出直线 AP 的方程，然后用点 P 的坐标表示 k_1,k_2，再求解.

解：(1)由题意得，$a=2$，$\frac{a^2}{c}-c=3$. (2分)

又 $a^2=b^2+c^2$，

所以 $b=\sqrt{3}$，$c=1$， (4分)

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. (5分)

(2)**解法一** 由题意知，直线 AP 的斜率存在且大于0，设直线 AP 的斜率为 $k(k>0)$，则直线 AP 的方程为 $y=k(x+2)$. (7分)

令 $x=\frac{b^2}{c}=3$，则 $y=5k$，即 $N(3,5k)$.

又 $B(2,0)$，所以 $k_1=\frac{5k-0}{3-2}=5k$.

设 $P(x_P,y_P)$，联立得 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\y=k(x+2),\end{cases}$ 消去 y 得 $(3+4k^2)x^2+16k^2x+16k^2-12=0$，所以 $-2\cdot x_P=\frac{16k^2-12}{4k^2+3}$，得 $x_P=\frac{6-8k^2}{4k^2+3}$，所以 $y_P=k(x_P+2)=\frac{12k}{4k^2+3}$，得 $P(\frac{6-8k^2}{4k^2+3},\frac{12k}{4k^2+3})$. (9分)

又 $B(2,0)$，所以 $k_{BP}=\frac{\frac{12k}{4k^2+3}}{\frac{6-8k^2}{4k^2+3}-2}=-\frac{3}{4k}$，

所以直线 BP 的方程为 $y=-\frac{3}{4k}(x-2)$. (11分)

令 $x=-\frac{b^2}{c}=-3$，得 $y=\frac{15}{4k}$，即 $M(-3,\frac{15}{4k})$，

又 $A(-2,0)$，所以 $k_2=\frac{\frac{15}{4k}}{-3+2}=-\frac{15}{4k}$. (13分)

所以 $k_1-k_2=5k+\frac{15}{4k}\geqslant 5\sqrt{3}$，当且仅当 $k=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时取"="， (15分)

所以 k_1-k_2 的最小值为 $5\sqrt{3}$. (16分)

解法二 设 $P(x_0,y_0)(x_0\neq\pm2)$，则 $\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{3}=1$，直线 AP 的方程为 $y=\frac{y_0}{x_0+2}(x+2)$. (7分)

令 $x=\frac{b^2}{c}=3$，则 $y=\frac{5y_0}{x_0+2}$，即 $N(3,\frac{5y_0}{x_0+2})$，所以 $k_1=\frac{5y_0}{x_0+2}$. (9分)

同理可得 $k_2=\frac{5y_0}{x_0-2}$. (11分)

所以 $k_1-k_2=\frac{5y_0}{x_0+2}-\frac{5y_0}{x_0-2}=-\frac{20y_0}{x_0^2-4}=\frac{15}{y_0}$，又 $0<y_0\leqslant\sqrt{3}$，所以 $k_1-k_2=\frac{15}{y_0}\geqslant\frac{15}{\sqrt{3}}=5\sqrt{3}$， (15分)

所以 k_1-k_2 的最小值为 $5\sqrt{3}$. (16分)

解法三 设 $P(x_0,y_0)(x_0\neq\pm2)$，则 $\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{3}=1$，直线 AP 的方程为 $y=\frac{y_0}{x_0+2}(x+2)$. (7分)

令 $x=\frac{b^2}{c}=3$，则 $y=\frac{5y_0}{x_0+2}$，即 $N(3,\frac{5y_0}{x_0+2})$，所以 $k_1=\frac{5y_0}{x_0+2}$. (9分)

同理可得 $k_2=\frac{5y_0}{x_0-2}$. (11分)

所以 $k_1k_2=\frac{5y_0}{x_0+2}\times\frac{5y_0}{x_0-2}=\frac{25y_0^2}{x_0^2-4}=\frac{75y_0^2}{-4y_0^2}=-\frac{75}{4}$， (13分)

由题意知 $k_1>0$，所以 $k_1-k_2=k_1+\frac{75}{4k_1}\geqslant 5\sqrt{3}$，当且仅当 $k_1=\frac{5\sqrt{3}}{2}$ 时取"="， (15分)

所以 k_1-k_2 的最小值为 $5\sqrt{3}$. (16分)

【解后反思】 对于"直线与圆锥曲线的位置关系"这类问题，一般可选择将直线的斜率或点的坐标作为参数，将直线的斜率作为参数较为容易理解，但运算量较大，将点的坐标作为参数，虽然含有两个未知数，但是若能熟练应用整体消元法，则运算较为简单，如本题第(2)问，解法一是将直线 AP 的斜率作为参数，运算过程较为繁杂，解法二和解法三都是将点 P 的坐标作为参数，注重解题技巧，运算量相对较小.

19.【命题意图】 本题考查等差数列的基本量的计算、通项公式、前 n 项和公式，等比数列的通项公式，数列中的存在性问题等，考查考生的运算求解能力以及分析问题、解决问题的能力.

【解题思路】 (1)根据数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，用基本量进行运算；(2)①利用 S_n 与 a_n 的关系消去 S_n，得到 a_n 与 a_{n-1} 的递推关系，求出 $\{a_n\}$ 的通项公式，②先判断数列 $\{c_n\}$ 是单调递增数列，再假设数列 $\{c_n\}$ 中存在 c_m,c_n,c_p 三项成等差数列，利用有关知识推出矛盾，从而得结论.

解：(1)设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d. 因为数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，且 $a_2=3$，$S_5=25$，

所以 $\begin{cases}a_1+d=3,\\5a_1+10d=25,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}a_1=1,\\d=2,\end{cases}$

所以 $a_n=2n-1$， (2分)

$S_n=n^2=(\frac{a_n+1}{2})^2=\frac{1}{4}a_n^2+\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{4}$，

又 $S_n=Aa_n^2+Ba_n+C$，

所以 $A=\frac{1}{4}$，$B=\frac{1}{2}$，$C=\frac{1}{4}$. (4分)

(2)①因为 $A=0$，$B=2$，$C=-2$，

所以 $S_n=2a_n-2$.

当 $n=1$ 时，$S_1=a_1=2a_1-2$，所以 $a_1=2$. (6分)

当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(2a_n-2)-(2a_{n-1}-2)=2a_n-2a_{n-1}$，

所以 $a_n=2a_{n-1}(n\geqslant2)$. (8分)

所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为2，公比为2的等比数列，所以 $a_n=2^n$. (9分)

②因为 $c_n=a_n+\frac{1}{a_n}=2^n+\frac{1}{2^n}$，

所以 $c_{n+1}-c_n=(2^{n+1}+\frac{1}{2^{n+1}})-(2^n+\frac{1}{2^n})=\frac{2^{2n+1}-1}{2^{n+1}}>0$，

所以数列 $\{c_n\}$ 是单调递增数列. (11分)

假设数列 $\{c_n\}$ 中存在 c_m,c_n,c_p 三项成等差数列，

不妨设 $m<n<p$，则 $c_m<c_n<c_p$，故 $2c_n=c_m+c_p$， (12分)

所以 $2(2^n+\frac{1}{2^n})=(2^m+\frac{1}{2^m})+(2^p+\frac{1}{2^p})$，

两边同乘以 2^n，得 $2^{2n+1}+2=2^{m+n}+2^{n-m}+2^{p+n}+2^{n-p}$. (14分)

因为 $m<n<p$，所以 2^{n-p} 为分数，

故上式左侧为整数，右侧为分数，等式不成立.

所以数列 $\{c_n\}$ 中不存在三项成等差数列. (16分)

【名师指引】 等差数列和等比数列的通项公式与前 n 项和问题，一般是把题设中的条件转化为有关基本量的式子，然后进行求解，如本题第(1)问. 对于数列中的探究性问题，要掌握一些常见的方法，如利用函数研究数列，本题第(2)问中的②就是利用函数思想研究数列的单调性，从而实现后续问题的求解.

20.【命题意图】 本题考查利用导数研究函数的单调性和最值、函数的零点存在性定理、导数的几何意义等知识，考查考生的运算求解能力以及综合运用所学知识分析问题和解决问题的能力.

【解题思路】 (1)①对 $f_2(x)$ 求导得到 $f_2(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的单调性，然后求 $f_2(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的最小值，②先利用导数得到函数 $F(x)$ 的单调性与极值，然后利用零点存在性定理证明即可；(2)分别写出切线方程，然后联立求得 y_0，将问题转化为不等式的证明.

解：(1)①当 $a=1$ 时 $f_2(x)=e^x-x^2$，则 $f_2'(x)=e^x-2x$.

设 $g(x)=e^x-2x$，则 $g'(x)=e^x-2$，

当 $x\in(0,\ln2)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，

当 $x\in(\ln2,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

所以 $g(x)$ 在 $x=\ln2$ 处取得极小值，也是最小值，且极小值为 $g(\ln2)=2-2\ln2>0$， (3分)

所以 $f_2'(x)>0$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立，所以 $f_2(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f_2(x)_{\min}=f_2(0)=1$. (4分)

②由①知，当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$e^x>x^2$.

因为 $F(x)=e^x-x+b$，所以 $F'(x)=e^x-1$.

当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$F'(x)<0$，$F(x)$ 单调递减，

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$F'(x)>0$，$F(x)$ 单调递增，

所以 $F(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值，且极小值为 $F(0)=1+b$， (6分)

因为 $F(x)$ 有两个不同的零点，

所以 $F(0)=1+b<0$，所以 $b<-1$.

因为 $F(b)=e^b-b+b=e^b>0$，$F(0)<0$，

所以 $F(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上有一个零点. (7分)

令 $x^2-x+b=0$，解得 $x=\frac{1\pm\sqrt{1-4b}}{2}$，

取 $x_0'=\frac{1+\sqrt{1-4b}}{2}$，则 $x_0^2>0$.

因为当 $x\geqslant0$ 时，$e^x>x^2$，所以 $e^{x_0'}>x_0'^2$，

所以 $e^{x_0'}-x_0'+b>x_0'^2-x_0'+b=0$，

即 $F(x_0')>0$， (9分)

又 $F(0)<0$，所以 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有一个零点.

综上可知，实数 b 的取值范围为 $(-\infty,-1)$. (10分)

(2)因为 $f_1(x)=e^x+x$，所以 $f_1'(x)=e^x+1$.

所以函数 $f_1(x)$ 的图象在 $x=t$ 处的切线方程为 $y-(e^t+t)=(e^t+1)(x-t)$ ③,

函数 $f_1(x)$ 的图象在 $x=-t$ 处的切线方程为 $y-(e^{-t}-t)=(e^{-t}+1)(x+t)$ ④.

联立③④解得 $x_0=\dfrac{(1+t)-(e^t)^2(1-t)}{(e^t)^2-1}$,$y_0=\dfrac{(1+t)-e^t(1-t)}{e^t-1}$.

要证 $y_0=\dfrac{(1+t)-e^t(1-t)}{e^t-1}>1$,只要证 $e^t(t-2)+2+t>0$. (13 分)

令 $h(t)=e^t(t-2)+2+t$,则 $h'(t)=e^t(t-1)+1$.

令 $m(t)=e^t(t-1)+1$,

则当 $t\geqslant 0$ 时,$m'(t)=te^t\geqslant 0$,所以 $m(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增,

又 $m(0)=0$,所以 $m(t)\geqslant 0$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立,

即 $h'(t)\geqslant 0$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立,所以 $h(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增,

又 $h(0)=0$,所以 $h(t)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立,故原式得证. (16 分)

【解后反思】 第(1)问中的②中函数的零点问题,不能仅仅依据函数的图象得到 $F(x)$ 的极小值 $F(0)=1+b<0$,还要根据函数的零点存在性定理验证存在 $x_0>0$,使得 $F(x_0)>0$,且当 $b<-1$ 时,$F(b)>0$. 对于第(2)问中 $y_0>1$ 的证明问题,需要考虑到构建以 t 为变量的函数,从而利用函数的单调性进行解决.

21. A. [选修 4-1:几何证明选讲]

【命题意图】 本题主要考查切割线定理、相交弦定理等基础知识,考查考生的推理论证能力与运算求解能力.

【解题思路】 先在⊙O_1 中,由切割线定理得到 $PB=3$,再在⊙O_2 中,由相交弦定理得到 $PE=4$,进而利用切割线定理求得 AD 的长.

解:因为 PA 是⊙O_1 的切线,PD 是⊙O_1 的割线,

所以 $PA^2=PB\cdot PD$,

即 $6^2=PB\cdot(PB+9)$,所以 $PB=3$. (3 分)

在⊙O_2 中,$PA\cdot PC=PB\cdot PE$,即 $6\times 2=3\times PE$,

所以 $PE=4$. (6 分)

因为 AD 为⊙O_2 的切线,DE 是⊙O_2 的割线,

且 $DE=DB+BP+PE=9+3+4=16$,

所以 $AD^2=DB\cdot DE=9\times 16=144$,

所以 $AD=12$. (10 分)

B. [选修 4-2:矩阵与变换]

【命题意图】 本题考查矩阵的特征值和特征向量、矩阵乘法等基础知识,考查运算求解能力.

【解题思路】 先设特征向量对应的特征值为 λ,根据特征向量的定义解得 λ 和 b,再根据矩阵乘法求出 $\boldsymbol{A}^2$.

解:设特征向量 $\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ 对应的特征值为 λ,

则 $\begin{bmatrix}2&b\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$,

所以 $\begin{bmatrix}2-b\\1-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda\\-\lambda\end{bmatrix}$,所以 $\lambda=2$,$b=0$, (6 分)

所以 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0\\1&3\end{bmatrix}$,所以 $\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}2&0\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&0\\5&9\end{bmatrix}$. (10 分)

C. [选修 4-4:坐标系与参数方程]

【命题意图】 本题主要考查直线和圆的极坐标方程与直角坐标方程的互化、直线与圆的位置关系、点到直线的距离等知识,考查考生的运算求解能力.

【解题思路】 先把直线 l 和圆 C 的极坐标方程转化为直角坐标方程,然后利用直线与圆有交点列出不等式求解.

解:以极坐标系的极点为平面直角坐标系的坐标原点,以极轴为 x 轴正半轴,建立平面直角坐标系,

直线 $l:\rho\cos(\theta+\dfrac{\pi}{4})=\sqrt{2}$ 的直角坐标方程为 $x-y-2=0$, (3 分)

圆 $C:\rho=a\cos\theta$ 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-ax=0$,圆心为 $(\dfrac{a}{2},0)$,半径为 $\dfrac{a}{2}$. (6 分)

因为直线 l 与圆 C 有交点,所以 $\dfrac{|\frac{a}{2}-2|}{\sqrt{2}}\leqslant\dfrac{a}{2}$,

得 $a\geqslant 4(\sqrt{2}-1)$,所以实数 a 的取值范围为 $[4(\sqrt{2}-1),+\infty)$. (10 分)

D. [选修 4-5:不等式选讲]

【命题意图】 本题考查柯西不等式的应用,考查考生的推理论证能力.

【解题思路】 先对根号下面的式子进行因式分解,确定 x 的取值范围,再利用柯西不等式证明即可.

解:因为 $\sqrt{-x^2+10x-9}+\sqrt{-x^2+68x-256}=\sqrt{(x-9)(1-x)}+\sqrt{(4-x)(x-64)}$,

所以 x 的取值范围是 $[4,9]$. (5 分)

由柯西不等式得,

$\sqrt{-x^2+10x-9}+\sqrt{-x^2+68x-256}=\sqrt{9-x}\cdot\sqrt{x-1}+\sqrt{x-4}\cdot\sqrt{64-x}\leqslant\sqrt{(9-x+x-4)(x-1+64-x)}=\sqrt{5\times 63}=3\sqrt{35}$(当且仅当 $\sqrt{(x-9)(x-64)}=\sqrt{(4-x)(1-x)}$,即 $x=\dfrac{143}{17}$ 时取等号). (10 分)

【归纳总结】 柯西不等式具有以下特点:(1)结构整齐,是证明不等式和求函数最值的有力工具;(2)形式多变,其代数、向量、概率等各种表现形式体现了数学各分支间的紧密联系. 柯西不等式的三种形式:(1)代数形式——设 $a_i,b_i\in\mathbf{R}(i=1,2,\cdots,n)$,则 $(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2\leqslant(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)$;(2)向量形式——$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$;(3)概率形式——设离散型随机变量 ξ 的分布列为 $P(\xi=x_k)=p_k,k=1,2,\cdots,n$,则 $E\xi^2\geqslant(E\xi)^2$.

22. 【命题意图】 本题考查抛物线的几何性质,直线与抛物线的位置关系,点到直线的距离,向量的数量积等,考查考生的运算求解能力以及分析问题和解决问题的能力.

【解题思路】 (1)由题设条件列出关于 p,b 的方程,解之可得 p,b 的值;(2)根据题设以点 P 的纵坐标为参数写出点 P 的坐标,由 $\angle APB$ 为钝角,结合向量的数量积列出不等式,解不等式即可.

解:(1)设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,AB 的中点为 $M(x_0,y_0)$.

由 $\begin{cases}y^2=2px,\\y=x+b,\end{cases}$ 得 $x^2+2(b-p)x+b^2=0$,

所以 $\Delta=4(b-p)^2-4b^2=4p(p-2b)>0$,$x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}=p-b$.

依题意得 $p-b=5$ ①. (2 分)

又抛物线 C 的焦点 $(\dfrac{p}{2},0)$ 到直线 l 的距离为 $\sqrt{2}$,

所以 $\dfrac{|\frac{p}{2}+b|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$,所以 $|p+2b|=4$ ②. (4 分)

由①②,得 $\begin{cases}p=2,\\b=-3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}p=\dfrac{14}{3},\\b=-\dfrac{1}{3}.\end{cases}$

又 $b\in\mathbf{Z}$,所以 $\begin{cases}p=2,\\b=-3.\end{cases}$ (5 分)

(2)由(1)可得 $x^2-10x+9=0$,解得 $x=1$ 或 9,不妨取 $x_1=1$,$x_2=9$, (6 分)

则抛物线 C 与直线 l 交于 $(1,-2)$,$(9,6)$ 两点,

即 $A(1,-2)$,$B(9,6)$,设 $P(\dfrac{t^2}{4},t)$,

则 $\overrightarrow{AP}=(\dfrac{t^2}{4}-1,t+2)$,$\overrightarrow{BP}=(\dfrac{t^2}{4}-9,t-6)$. (7 分)

因为 $\angle APB$ 为钝角,

所以 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=(\dfrac{t^2}{4}-1,t+2)\cdot(\dfrac{t^2}{4}-9,t-6)=(\dfrac{t^2}{4}-1)(\dfrac{t^2}{4}-9)+(t+2)(t-6)=\dfrac{(t+2)^3(t-6)}{16}<0$, (9 分)

所以 $-2<t<6$,即点 P 的纵坐标的取值范围是 $(-2,6)$. (10 分)

23. 【命题意图】 本题考查数列的递推关系及数学归纳法等知识,考查考生的探究能力及推理论证能力.

【解题思路】 (1)对 n 取特殊值,由 $T_n=S_n^2$ 求出 a_1,a_2,a_3;(2)根据前三项的数值可猜想数列 $\{a_n\}$ 的通项公式,然后利用数学归纳法证明.

解:(1)当 $n=1$ 时,$a_1^3=a_1^2$,因为 $a_1\neq 0$,所以 $a_1=1$. (1 分)

当 $n=2$ 时,$a_1^3+a_2^3=(a_1+a_2)^2$,因为 $a_1=1$,所以 $a_2^3-a_2^2-2a_2=0$,

因为 $a_2\neq 0$,所以 $a_2^2-a_2-2=0$,所以 $a_2=2$ 或 $a_2=-1$. (2 分)

当 $a_2=-1$,$n=3$ 时,$a_1^3+a_2^3+a_3^3=(a_1+a_2+a_3)^2$,所以 $a_3^3=a_3^2$,因为 $a_3\neq 0$,所以 $a_3=1$.

当 $a_2=2$,$n=3$ 时,$a_1^3+a_2^3+a_3^3=(a_1+a_2+a_3)^2$,所以 $a_3^3-a_3^2-6a_3=0$,

因为 $a_3\neq 0$,所以 $a_3^2-a_3-6=0$,所以 $a_3=3$ 或 $a_3=-2$. (4 分)

综上可知,$a_1=1,a_2=-1,a_3=1$ 或 $a_1=1,a_2=2,a_3=-2$ 或 $a_1=1,a_2=2,a_3=3$. (5 分)

(2)因为 $a_n>0$,所以由(1)知 $a_1=1,a_2=2,a_3=3$,猜想 $a_n=n$. (6 分)

接下来用数学归纳法证明这个猜想,

即证 $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$. (7 分)

①当 $n=1$ 时,$a_1^3=a_1^2$,结论成立.

②假设当 $n=k$ 时,$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=\dfrac{k^2(k+1)^2}{4}$,

则当 $n=k+1$ 时,$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3=\dfrac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3=\dfrac{(k+1)^2}{4}(k^2+4k+4)=\dfrac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$,结论也成立.

根据①②可知,$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$,故数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=n$. (10 分)