江苏省仪征中学 2018-2019 学年度第二学期

高一数学周练（四）

班级____________姓名____________ 学号_________

一、选择题（本大题共 10 小题，共 50 分）

1. 以下命题中真命题的序号是(　　)

①若棱柱被一平面所截，则分成的两部分不一定是棱柱；

②有两个面平行，其余各面都是梯形的几何体叫棱台；

③用一个平面去截圆锥，底面和截面之间的部分组成的几何体叫圆台；

④有两个面平行，其余各面都是平行四边形的几何体叫棱柱.

A. ③④　　B. ①④　　C. ①②④　　D. ①

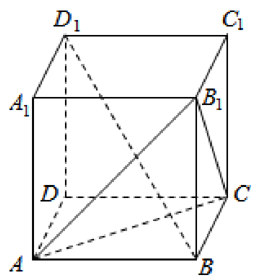
2. 已知空间三条直线 l、m、n.若 l 与 m 异面，且 l 与 n 异面，则(　　)

A. m 与 n 异面　　B. m 与 n 相交　　C. m 与 n 平行　　D. m 与 n 异面、相交、平行均有可能

3. 已知 m，n 表示两条不同直线，a 表示平面，下列说法中正确的是(　)

A. 若$m\perp a$，$n\subset a$，则$m\perp n$　　B. 若$m//a$，$n//a$，则$m//n$

C. 若$m\perp a$，$m\perp n$，则$n//a$　　D. 若$m//a$，$m\perp n$，则$n\perp a$



4. 如图，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，下列结论不正确的是(　　)

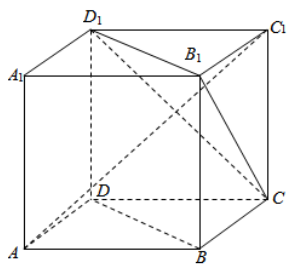
A. $C_1D_1\perp B_1C$　　B. $BD_1\perp AC$　　C. $BD_1//B_1C$　　D. $\angle ACB_1=60°$

5. 在$\triangle ABC$中，角 A、B、C 所对应的边分别为 a，b，c，若$\frac{c}{b}<\cos A$，则$\triangle ABC$为(　　)

A. 锐角三角形　　B. 直角三角形　　C. 钝角三角形　　D. 非钝角三角形

6.在$100\sqrt{3}m$高的山顶上，测得山下一塔顶与塔底的俯角分别是$30°$、$60°$，则塔高为(　　)

A. $\frac{400}{3}m$　　B. $\frac{400\sqrt{3}}{3}m$　　C. $\frac{200\sqrt{3}}{3}m$　　D. $\frac{200}{3}m$



7. 如图，$ABCD-A_1B_1C_1D_1$为正方体，则以下结论：

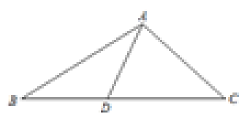
①$BD//$平面CB_1D_1；②$AC_1\perp BD$；③$AC_1\perp$平面CB_1D_1

其中正确结论的个数是(　　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

8. 如图，在$\triangle ABC$上，D 是 BC 上的点，且$AC=CD$，$2AC=\sqrt{3}AD$，$AB=2AD$，则$\sin B$等于(　　)

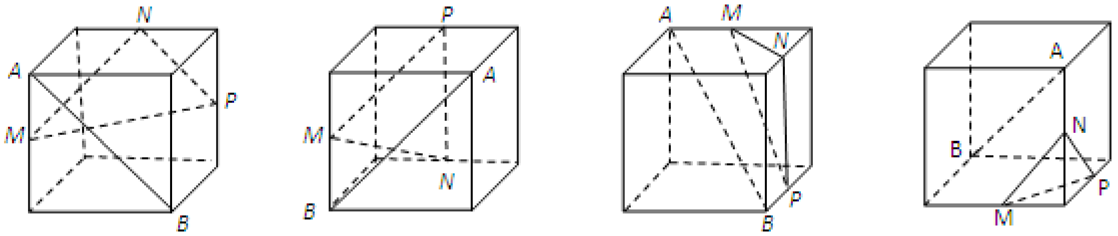
A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{6}}{6}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{6}$



9.已知锐角三角形三边分别为 3，4，a，则 a 的取值范围为(　　)

A. $1<a<5$　　B. $1<a<7$　　C. $\sqrt{7}<a<5$　　D. $\sqrt{7}<a<7$

10. 下列四个正方体图形中，A，B 为正方体的两个顶点，M，N，P 分别为其所在棱的中点，能得出$AB//$平面 MNP 的图形的序号是(　　)



①　　　　②　　　　③　　　　④

A. ①、②　　　B. ①、③　　　C. ②、③　　　D. ②、④

二、填空题（本大题共 6 小题，共 30 分）

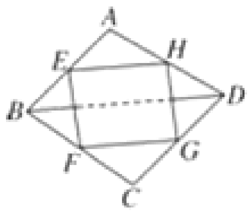
11．三个平面能把空间分为____________________部分.(填上所有可能结果)

12. 下列四个命题正确的是__________

(1)$a//b$，$b//c \Rightarrow a//c$　(2)$a \perp b$，$b \perp c \Rightarrow a//c$　(3)$a//\alpha$，$b \subset \alpha \Rightarrow a//b$　(4)$a//b$，$b//\alpha \Rightarrow a//\alpha$

13. 在$\triangle ABC$中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且$b\sin A = \sqrt{3}a\cos B$，则角 B 的大小为______.

14. 在空间四边形 $ABCD$ 中，E、F、G、H 分别是边 AB、BC、CD、DA 的中点，对角线$AC = BD = 2$，且$AC \perp BD$，则四边形 $EFGH$ 的面积为______.

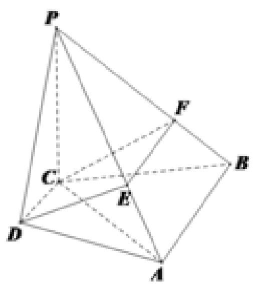


15. 已知$\triangle ABC$中，$3(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})\cdot\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{AB}^2$，则$\frac{\tan A}{\tan B} =$______.

16. 已知在平面四边形 $ABCD$ 中，$AB = \sqrt{2}$，$BC = 2$，$AC \perp CD$，$AC = CD$，则四边形 $ABCD$ 的面积的最大值为________.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分）

17. 如图，在四棱锥$P-ABCD$中，$PC\perp$平面 $ABCD$，$AB//CD$，$CD\perp AC$，过 CD 的平面分别与PA,PB交于点E,F．(1)求证：$CD\perp$平面 PAC；(2)求证：$AB//EF$．



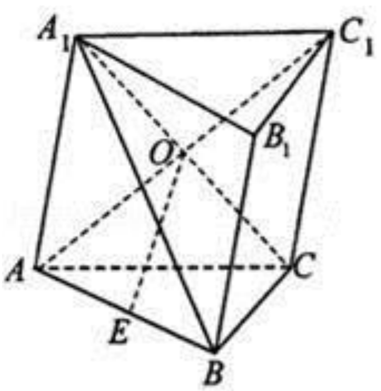
18. $\triangle ABC$的内角 A、B、C 所对的边分别是，a、b、c，$\triangle ABC$的面积$S=\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

(Ⅰ)求 A 的大小；(Ⅱ)若$b+c=5$，$a=\sqrt{7}$，求$\triangle ABC$的面积的大小.

19. 在$\triangle ABC$中，内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，已知$b+c=2a\cos B$.

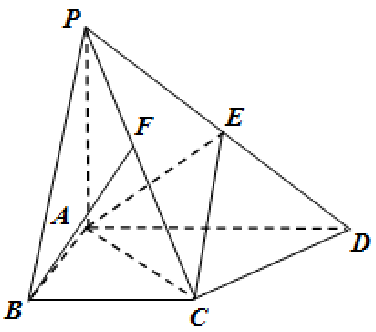
(Ⅰ)证明：$A=2B$；(Ⅱ)若$\triangle ABC$的面积$S=\frac{a^2}{4}$，求角 A 的大小.

20. 如图，在斜三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，侧面AA_1C_1C是菱形，AC_1与A_1C交于点 O，E 是棱 AB 上一点，且$OE//$平面BCC_1B_1.　(1)求证：E 是 AB 中点；(2)若$AC_1\perp A_1B$，求证：$AC_1\perp BC$.



21. 如图所示四棱锥$P-ABCD$中，$PA\perp$底面$ABCD$，四边形$ABCD$中，$AB\perp AD$，$BC//AD$，$PA=AB=BC=2$，$AD=4$，E为PD的中点，F为PC中点.

(Ⅰ)求证：$CD\perp$平面PAC；(Ⅱ)求证：$BF//$平面ACE；(Ⅲ)求直线PD与平面PAC所成的角的正弦值.

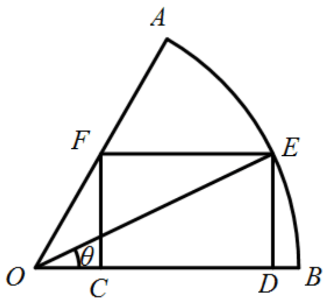


22. 扇形AOB中心角为$60°$，所在圆半径为$\sqrt{3}$，它按如下(Ⅰ)(Ⅱ)两种方式有内接矩形$CDEF$.

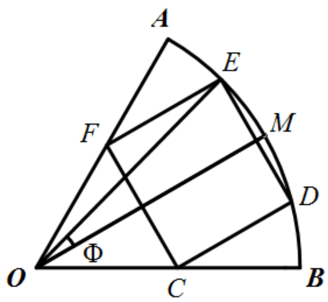
(Ⅰ)矩形$CDEF$的顶点C、D在扇形的半径OB上，顶点E在圆弧AB上，顶点F在半径OA上，设$\angle EOB=\theta$；

(Ⅱ)点M是圆弧AB的中点，矩形$CDEF$的顶点D、E在圆弧AB上，且关于直线OM对称，顶点C、F分别在半径OB、OA上，设$\angle EOM=\varphi$；

试研究(Ⅰ)(Ⅱ)两种方式下矩形面积的最大值，并说明两种方式下哪一种矩形面积最大？



图Ⅰ



图Ⅱ

江苏省仪征中学 2018-2019 学年度第二学期

高一数学周练（四）

班级____________姓名____________ 学号_________

一、选择题（本大题共 10 小题，共 50 分）

1. 以下命题中真命题的序号是(　　)

①若棱柱被一平面所截，则分成的两部分不一定是棱柱；

②有两个面平行，其余各面都是梯形的几何体叫棱台；

③用一个平面去截圆锥，底面和截面之间的部分组成的几何体叫圆台；

④有两个面平行，其余各面都是平行四边形的几何体叫棱柱.

A. ③④　　B. ①④　　C. ①②④　　D. ①

【答案】*D*

【解析】解：①若棱柱被一平面所截，则分成的两部分不一定是棱柱；正确，当平面与棱柱的所有平面不平行时，截出的两个几何体不是棱柱.

②有两个面平行，其余各面都是梯形的几何体叫棱台；不正确，不满足棱台的定义.

③用一个平面去截圆锥，底面和截面之间的部分组成的几何体叫圆台；不正确，当平面与底面平行时，底面和截面之间的部分组成的几何体叫圆台.

④有两个面平行，其余各面都是平行四边形的几何体叫棱柱.不正确，不满足棱柱的定义.

故选：*D*.

直接利用棱柱、棱台、圆台的定义，判断选项即可得出.

本题考查棱柱、棱台、圆台的定义的应用，是基础题.

2. 已知空间三条直线 l、m、n.若 l 与 m 异面，且 l 与 n 异面，则(　)

A. m 与 n 异面　　B. m 与 n 相交

C. m 与 n 平行　　D. m 与 n 异面、相交、平行均有可能

【答案】*D*

【解析】解：∵空间三条直线 l、m、n.若 l 与 m 异面，且 l 与 n 异面，

∵ m与 n 可能异面(如图3)，也可能平行(图1)，也可能相交(图2)，

故选 *D*.

可根据题目中的信息作图判断即可.

本题考查平面的基本性质，着重考查学生的理解与转化能力，考查数形结合思想，属于基础题.

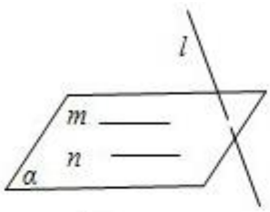


图1

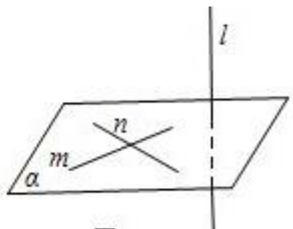


图2

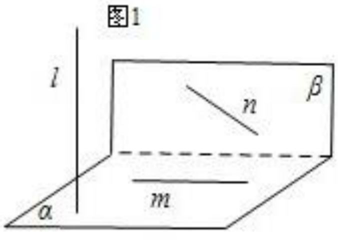


图3

3. 已知 m，n 表示两条不同直线，α 表示平面，下列说法中正确的是(　)

A. 若$m\perp\alpha$，$n\subset\alpha$，则$m\perp n$　　B. 若$m//\alpha$，$n//\alpha$，则$m//n$

C. 若$m\perp\alpha$，$m\perp n$，则$n//\alpha$　　D. 若$m//\alpha$，$m\perp n$，则$n\perp\alpha$

【答案】*A*

【解析】*A*.运用线面垂直的性质，即可判断；

B.运用线面平行的性质，结合线线的位置关系，即可判断；

C.运用线面垂直的性质，结合线线垂直和线面平行的位置即可判断；

D.运用线面平行的性质和线面垂直的判定，即可判断.

考查直线与平面的平行、垂直的判断与性质，记熟这些定理是迅速解题的关键，注意观察空间的直线与平

面的模型．

【解析】

解：A.若$m\perp\alpha$，$n\subset\alpha$，则$m\perp n$，故 A 正确；

B.若$m//\alpha$，$n//\alpha$，则 m，n 相交或平行或异面，故 B 错；

C.若$m\perp\alpha$，$m\perp n$，则$n//\alpha$或$n\subset\alpha$，故 C 错；

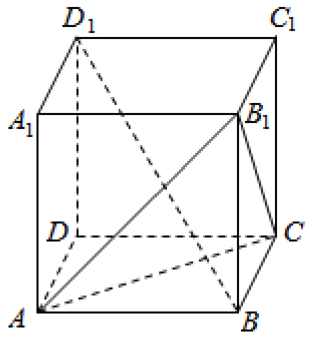
D.若$m//\alpha$，$m\perp n$，则$n//\alpha$或$n\subset\alpha$或$n\perp\alpha$，故 D 错．

故选 A．

4. 如图，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，下列结论不正确的是(　　)

A. $C_1D_1\perp B_1C$　　B. $BD_1\perp AC$

C. $BD_1//B_1C$　　D. $\angle ACB_1=60°$



【答案】C【解析】【分析】

本题考查了空间线线位置关系及其判定方法，属于基础题.如图所示，建立空间直角坐标系.利用向量垂直与数量积的关系即可得出．

【解答】

解：如图所示，建立空间直角坐标系．

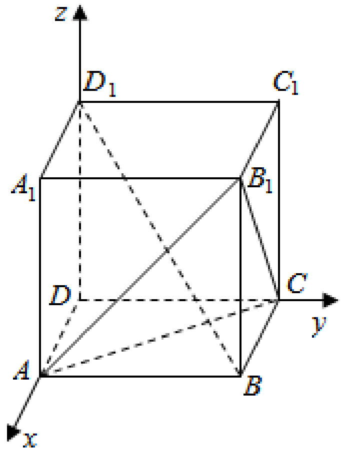
不妨设正方体的棱长$=1$．

则$D(0{,}0,\ 0)$，$B(1{,}1,\ 0)$，$C(0{,}1,\ 0)$，$B_1(1{,}1,\ 1)$，$D_1(0{,}0,\ 1)$．

$\therefore\overrightarrow{BD_1}=(-1,-1{,}1)$，$\overrightarrow{B_1C}=(-1{,}0,\ -1)$．

$\therefore\overrightarrow{BD_1}\cdot\overrightarrow{B_1C}=1+0-1=0$．$\therefore\overrightarrow{BD_1}\perp\overrightarrow{B_1C}$．

因此不可能有$BD_1//B_1C$.故选 C．



5. 在$\triangle ABC$中，角 A、B、C 所对应的边分别为 a，b，c，若$\frac{c}{b}<\cos A$，则$\triangle ABC$为(　　)

A. 锐角三角形　　B. 直角三角形　　C. 钝角三角形　　D. 非钝角三角形

【答案】C【解析】【分析】本题主要考查了正弦定理，三角形的内角和及诱导公式，两角和的正弦公式，属于基础题．

由已知结合正弦定理可得$\sin C<\sin B\cos A$，利用三角形的内角和及诱导公式可得，

$\sin(A+B)<\sin B\cos A$整理可得$\sin A\cos B+\sin B\cos A<\sin B\cos A$，从而有$\sin A\cos B<0$，结合三角形的性质可求．

【解答】解：$\because A$是$\triangle ABC$的一个内角，$0<A<\pi$，$\therefore\sin A>0$．$\because\frac{c}{b}<\cos A$，

由正弦定理可得，$\sin C<\sin B\cos A$，$\therefore\sin(A+B)<\sin B\cos A$，

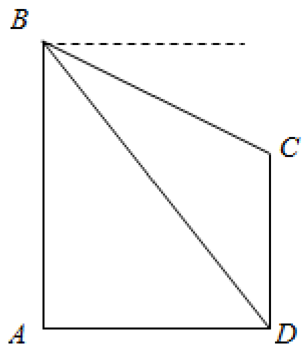
$\therefore\sin A\cos B+\sin B\cos A<\sin B\cos A$，$\therefore\sin A\cos B<0$，又$\sin A>0$，$\therefore\cos B<0$，即 B 为钝角．故选 C．

6.在$100\sqrt{3}m$高的山顶上，测得山下一塔顶与塔底的俯角分别是$30°$、$60°$，则塔高为(　　)

A. $\frac{400}{3}m$　　B. $\frac{400\sqrt{3}}{3}m$　　C. $\frac{200\sqrt{3}}{3}m$　　D. $\frac{200}{3}m$

【答案】C

【解析】解：如图，设 AB 为山，CD 为塔，则



$Rt\triangle ABD$中，$\angle ADB=60°$，$AB=100\sqrt{3}m$，

$\therefore \sin\angle ADB=\frac{AB}{BD}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，得$BD=200m$

在$\triangle BCD$中，$\angle BDC=90°-60°=30°$，$\angle DBC=60°-30°=30°$，

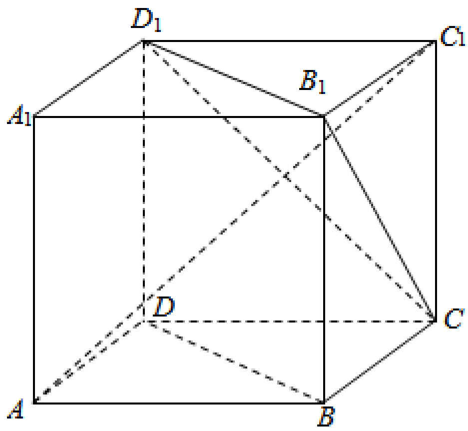
$$\therefore \angle C=180°-30°-30°=120°$$

由正弦定理，得$CD=\frac{200}{\sin 120°}\times\sin 30°=\frac{200\sqrt{3}}{3}m$，即塔高为$\frac{200\sqrt{3}}{3}m$.　　故选：$C$.

如图，设 AB 为山，CD 为塔，$Rt\triangle ABD$中利用正弦的定义，算出$BD=200m$.在$\triangle BCD$中，得到$\angle C=120°$、$\angle DBC=30°$，利用正弦定理列式，解出 CD 即为塔高.

本题给出实际问题，求距离山远处的一个塔的高，着重考查了直角三角形三角函数的定义和正弦定理解三角形等知识，属于基础题.

7. 如图，$ABCD-A_1B_1C_1D_1$为正方体，则以下结论：①$BD//$平面CB_1D_1；②$AC_1\perp BD$；③$AC_1\perp$平面CB_1D_1其中正确结论的个数是(　　)



A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

【答案】D【解析】解：由正方体的性质得，$BD//B_1D_1$，所以结合线面平行的判定定理可得：$BD//$平面CB_1D_1；所以①正确.

连接AC、A_1C_1，由正方体的性质得 $AC\perp BD$，$AA_1\perp BD$，又$AC\cap AA_1=A$，所以$BD\perp$平面AA_1C_1C，因为$AC_1\subset$平面AA_1C_1C，所以$AC_1\perp BD$，所以②正确.

由正方体的性质得$BD//B_1D_1$，由②可得$AC_1\perp BD$，所以$AC_1\perp B_1D_1$，同理可得$AC_1\perp CB_1$，进而结合线面垂直的判定定理得到：$AC_1\perp$平面CB_1D_1，所以③正确.

故选：D.

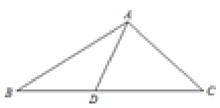
①由正方体的性质得$BD//B_1D_1$，所以结合线面平行的判定定理可得答案；

②由正方体的性质得 $AC\perp BD$，再由线面垂直的判定和性质可得答案；

③由正方体的性质得$BD//B_1D_1$，并且结合②可得$AC_1\perp B_1D_1$，同理可得$AC_1\perp CB_1$，进而结合线面垂直的判定定理得到答案.

解决此类问题的关键是熟练掌握几何体的结构特征与有关的判定定理，本题考查学生的空间想象能力与逻辑推理能力，属于基础题.

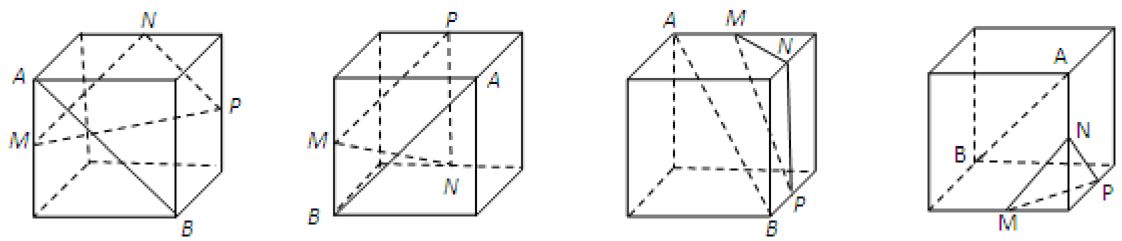
8. 如图，在$\triangle ABC$上，D 是 BC 上的点，且$AC=CD$，$2AC=\sqrt{3}AD$，$AB=2AD$，则$\sin B$等于(　　)



A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{6}}{6}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{6}$

【答案】C【解析】【分析】本题考查解三角形，涉及正余弦定理的应用，属中档题.
由题意设$AD=2x$,则$AC=CD=\sqrt{3}x$,$AB=4x$,在$\triangle ADC$中由余弦定理可得$\cos\angle ADC$,进而可得$\sin\angle ADB$,在$\triangle ADB$中由正弦定理可得$\sin B$.
【解答】
解：由题意设$AD=2x$，则$AC=CD=\sqrt{3}x$，$AB=4x$，
在$\triangle ADC$中由余弦定理可得$\cos\angle ADC=\frac{4x^2+3x^2-3x^2}{2\cdot 2x\cdot\sqrt{3}x}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\therefore\sin\angle ADB=\sin\angle ADC=\sqrt{1-(\frac{\sqrt{3}}{3})^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，
$\therefore$在$\triangle ADB$中由正弦定理可得$\sin B=\frac{AD\sin\angle ADB}{AB}=\frac{2x\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}}{4x}=\frac{\sqrt{6}}{6}$，故选 C.
9.已知锐角三角形三边分别为 3，4，a，则 a 的取值范围为(　　)
A. $1<a<5$　　B. $1<a<7$　　C. $\sqrt{7}<a<5$　　D. $\sqrt{7}<a<7$
【答案】C【解析】【分析】
解：分两种情况来考虑：
当 a 为最大边时，设 a 所对的角为α，由α锐角，根据余弦定理可得：$\cos\alpha=\frac{3^2+4^2-a^2}{2\times3\times4}>0$，可知只要
$3^2+4^2-a^2>0$即可，可解得：$0<a<5$；
当 a 不是最大边时，则 4 为最大边，同理只要保证 4 所对的角为锐角就可以了，
则有$3^2+a^2-4^2>0$，可解得：$a>\sqrt{7}$，所以综上可知 x 的取值范围为$\sqrt{7}<a<5$.
选 C.

10. 下列四个正方体图形中，A，B 为正方体的两个顶点，M，N，P 分别为其所在棱的中点，能得出$AB//$平面 MNP 的图形的序号是(　　)



①　②　③　④

A. ①、②　　B. ①、③　　C. ②、③　　D. ②、④
【答案】B【解析】解：在①中 NP 平行所在正方体的那个侧面的对角线，从而平行 AB，所以$AB//$平面 MNP；在③中设过点 B 且垂直于上底面的棱与上底面交点为 C，
则由$NP//CB$，$MN//AC$可知平面$MNP//$平行平面 ABC，
即$AB//$平面 MNP．故选 B.
分别利用线面平行的判定定理，在平面 MNP 中能否寻找一条直线和 AB 平行即可.
本题主要考查线面平行的判定，利用线面平行的判定，只要直线 AB 平行于平面 MNP 内的一条直线即可.
二、填空题（本大题共 6 小题，共 30 分）
11．三个平面能把空间分为______ 部分.(填上所有可能结果)
【答案】4，或 6，或 7，或 8
【解析】解：若三个平面两两平行，则把空间分成 4 部分；
若三个平面两两相交，且共线，则把空间分成 6 部分；
若三个平面两两相交，且有三条交线，则把空间分成 7 部分；
当两个平面相交，第三个平面同时与两个平面相交时，把空间分成 8 部分，
故答案为：4，或 6，或 7，或 8.
此类问题可以借助实物模型来研究，用房屋的结构来研究就行.

本题考查平面的基本性质及推论，考查这种问题比较形象的一个做法是同学们可以想象用三刀最多把西瓜切成几部分，同本题是一个相同的题目．
12. 下列四个命题正确的是____________

(1)$a//b$，$b//c \Rightarrow a//c$　　　(2)$a \perp b$，$b \perp c \Rightarrow a//c$

(3)$a//\alpha$，$b \subset \alpha \Rightarrow a//b$　　　(4)$a//b$，$b//\alpha \Rightarrow a//\alpha$

【答案】(1)【解析】【分析】本题考查平行公理及空间中直线的位置关系，同时考查线面平行的判定与性质，逐一判断即可．

【解答】解：对于(1)，由平行公理知正确;

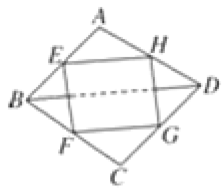
对于(2)，在空间中同时垂直于同一条直线的两条直线不一定平行，可以相交，异面，所以错误;

对于(3)，一条直线平行一个平面，则这直线与平面内的直线可能异面，所以错误;

对于(4)，$a//b$，$b//\alpha$，则 a 可能在α内，所以错误．故答案为(1)．

13. 在$\triangle ABC$中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且$b\sin A=\sqrt{3}a\cos B$，则角 B 的大小为______．
【答案】60°【解析】解：由题意得，$b\sin A=\sqrt{3}a\cos B$，
根据正弦定理得$\sin B\sin A=\sqrt{3}\sin A\cos B$，
$\because 0<A<\pi$，$\therefore \sin A \neq 0$，则$\sin B=\sqrt{3}\cos B$，$\therefore \tan B=\sqrt{3}$，
$\because 0°<B<180°$，$\therefore B=60°$，故答案为：60°．
由正弦定理化简已知的式子，由内角的范围和特殊角的三角函数值求出 B 的大小．
本题考查正弦定理，特殊角的三角函数值的应用，注意内角的范围，属于基础题．

14. 在空间四边形 $ABCD$ 中，E、F、G、H 分别是边 AB、BC、CD、DA 的中点，对角线$AC=BD=2$，且 $AC \perp BD$，则四边形 $EFGH$ 的面积为______．



【答案】1【解析】解：∵点 E、H 分别为四边形 $ABCD$ 的边 AB、AD 的中点，

$\therefore EH//BD$，且$EH=\frac{1}{2}BD=1$．同理求得$FG//BD$，且$FG=1$，

$\therefore EH//FG$，$EH=FG$又$\because AC \perp BD$，$BD=2 \therefore EF \perp EH$．
∴四边形 $EFGH$ 是正方形．∴四边形 $EFGH$ 的面积$=EF \cdot EH=1$．故答案为：1
利用中位线定理，$AC \perp BD$，可得出四边形 $EFGH$ 矩形，根据矩形的面积公式解答即可．
本题考查公理四证明平行四边形，考查线线垂直，确定四边形 $EFGH$ 是正方形是关键．

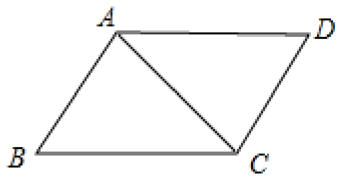
15. 已知$\triangle ABC$中，$3(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})\cdot\overrightarrow{AB}=4\overrightarrow{AB}^2$，则$\frac{\tan A}{\tan B}=$______．

【答案】-7【解析】解：$\because 3(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})\cdot\overrightarrow{AB}=4\overrightarrow{AB}^2$，

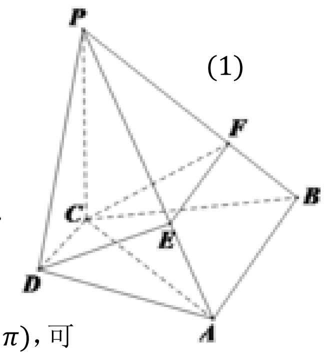
$\therefore 3\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AB}=4\overrightarrow{AB}^2$，根据向量数量积的和向量夹角的定义，

$\therefore 3|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{AB}|\cos(\pi-A)+3|\overrightarrow{CB}||\overrightarrow{AB}|\cos B=4|\overrightarrow{AB}|^2$，
$\therefore -3|\overrightarrow{CA}|\cos A+3|\overrightarrow{CB}|\cos B=4|\overrightarrow{AB}|$，
根据正弦定理，可得$-3\sin B\cos A+3\cos B\sin A=4\sin C$，
又$4\sin C=4\sin(A+B)=4\sin A\cos B+4\cos A\sin B$，$\therefore \sin A\cos B=-7\cos A\sin B$，
$\frac{\tan A}{\tan B}=\frac{\sin A\cos B}{\cos A\sin B}=\frac{-7\cos A\sin B}{\cos A\sin B}=-7$．故答案为：$-7$．

利用向量的数量积和向量夹角的定义，将$3(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})\cdot\overrightarrow{AB}=4\overrightarrow{AB}^2$转化为$3|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{AB}|\cos(\pi-A)+3|\overrightarrow{CB}||\overrightarrow{AB}|\cos B=|\overrightarrow{AB}|^2$，再应用正弦定理将边转化为角表示，即可得到$\sin A\cos B=-7\cos A\sin B$，把$\frac{\tan A}{\tan B}$化为正余弦表示代入即可得答案.
本题考查了向量的数量积在几何中的应用，涉及了向量数量积的定义，向量夹角的定义以及正弦定理的应用.解题时要特别注意向量的夹角与三角形内角的关系，在三角形问题中，解题的思路一般是应用正弦定理和余弦定理进行“边化角”或“角化边”.属于中档题.
16. 已知在平面四边形 $ABCD$ 中，$AB=\sqrt{2}$，$BC=2$，$AC\perp CD$，$AC=CD$，则四边形 $ABCD$ 的面积的最大值为________.
【答案】$3+\sqrt{10}$【解析】【分析】
设$\angle ABC=\theta$，$\theta\in(0,\pi)$，由余弦定理求出AC^2，再求四边形 $ABCD$ 的面积表达式，利用三角恒等变换求出它的最大值．【解答】解：如图所示，



设$\angle ABC=\theta$，$\theta\in(0,\pi)$，则在$\triangle ABC$中，由余弦定理得，
$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\theta=6-4\sqrt{2}\cos\theta$，
$\therefore$四边形 $ABCD$ 的面积为$S=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}(AB\cdot BC\cdot\sin\theta+AC\cdot CD)$，
化简得：$S=\frac{1}{2}(2\sqrt{2}\sin\theta+6-4\sqrt{2}\cos\theta)=3+\sqrt{2}(\sin\theta-2\cos\theta)=3+\sqrt{10}\sin(\theta-\varphi)$，其中$\tan\varphi=2$，
当$\sin(\theta-\varphi)=1$时，S取得最大值为$3+\sqrt{10}$．故答案为$3+\sqrt{10}$.
三、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分）
17. 如图，在四棱锥$P-ABCD$中，$PC\perp$平面 $ABCD$，$AB//CD$，$CD\perp AC$，过 CD 的平面分别与PA,PB交于点E,F．(1)求证：$CD\perp$平面 PAC；(2)求证：$AB//EF$.
【答案】证：(1)因为$PC\perp$平面 $ABCD$，所以$PC\perp CD$，又因为$CD\perp AC$，所以$CD\perp$平面PAC.
(2)因为$AB//CD$，$AB\not\subset$平面 $CDEF$，$CD\subset$平面 $CDEF$，所以$AB//$平面 $CDEF$，又因为平面$PAB\cap$平面$CDEF=EF$，$AB\subset$平面 PAB，所以$AB//EF$.



【解析】本题考查空间中线面垂直的判断、线面平行的性质，属基础题.
由$PC\perp$平面 $ABCD$，得到$PC\perp CD$，又$CD\perp AC$，即可证$CD\perp$平面 PAC；
(2)先由$AB//CD$，证明$AB//$平面 $CDEF$，再由线面平行的性质即可证明$AB//EF$.
18. $\triangle ABC$的内角 A、B、C 所对的边分别是，a、b、c，$\triangle ABC$的面积$S=\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.
(Ⅰ)求 A 的大小；(Ⅱ)若$b+c=5$，$a=\sqrt{7}$，求$\triangle ABC$的面积的大小.
解：(Ⅰ)$\because S=\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{\sqrt{3}}{2}bc\cos A$，又$\because S=\frac{1}{2}bc\sin A$，可得：$\tan A=\sqrt{3}$，$\therefore$由$A\in(0,\pi)$，可得：$A=\frac{\pi}{3}$
(Ⅱ)$\because$由余弦定理$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，可得：$7=b^2+c^2-bc$，
$\therefore$可得：$(b+c)^2-3bc=7$，$\therefore$由$b+c=5$，可得：$bc=6$，$\therefore\triangle ABC$的面积$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

【解析】(Ⅰ)由平面向量数量积的运算，三角形面积公式可求$\tan A=\sqrt{3}$，结合范围$A\in(0,\pi)$，可得 A 的值，(Ⅱ)由余弦定理结合已知可求$bc=6$，进而利用三角形面积公式即可计算得解.
本题主要考查了平面向量数量积的运算，余弦定理，三角形面积公式在解三角形中的应用，考查了计算能力和转化思想，属于中档题.
19. 在$\triangle ABC$中，内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，已知$b+c=2a\cos B$.

(Ⅰ)证明：$A=2B$；(Ⅱ)若$\triangle ABC$的面积$S=\frac{a^2}{4}$，求角 A 的大小.

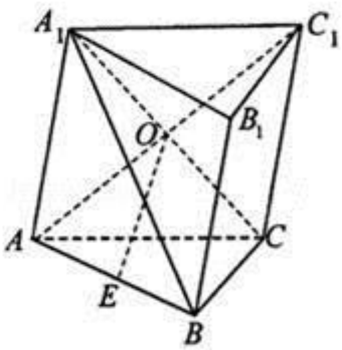
【答案】(Ⅰ)证明：$\because b+c=2a\cos B$，
$\therefore \sin B+\sin C=2\sin A\cos B$，$\therefore \sin B+\sin(A+B)=2\sin A\cos B$
$\therefore \sin B+\sin A\cos B+\cos A\sin B=2\sin A\cos B$
$\therefore \sin B=\sin A\cos B-\cos A\sin B=\sin(A-B)$
$\because A$，B 是三角形中的角，$\therefore B=A-B$，$\therefore A=2B$；

(Ⅱ)解：$\because\triangle ABC$的面积$S=\frac{a^2}{4}$，$\therefore \frac{1}{2}bc\sin A=\frac{a^2}{4}$，$\therefore 2bc\sin A=a^2$，

$\therefore 2\sin B\sin C=\sin A=\sin 2B$，$\therefore \sin C=\cos B$，$\therefore B+C=90^\circ$，或$C=B+90^\circ$，$\therefore A=90^\circ$或$A=45^\circ$.
【解析】(Ⅰ)利用正弦定理，结合和角的正弦公式，即可证明$A=2B$

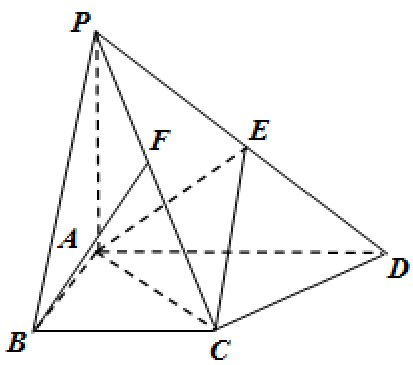
(Ⅱ)若$\triangle ABC$的面积$S=\frac{a^2}{4}$，则$\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{a^2}{4}$，结合正弦定理、二倍角公式，即可求角 A 的大小.

本题考查了正弦定理，解三角形，考查三角形面积的计算，考查二倍角公式的运用，属于中档题.
20. 如图，在斜三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，侧面AA_1C_1C是菱形，AC_1与A_1C交于点 O，E 是棱 AB 上一点，且$OE//$平面BCC_1B_1.
(1)求证：E 是 AB 中点；(2)若$AC_1\perp A_1B$，求证：$AC_1\perp BC$.

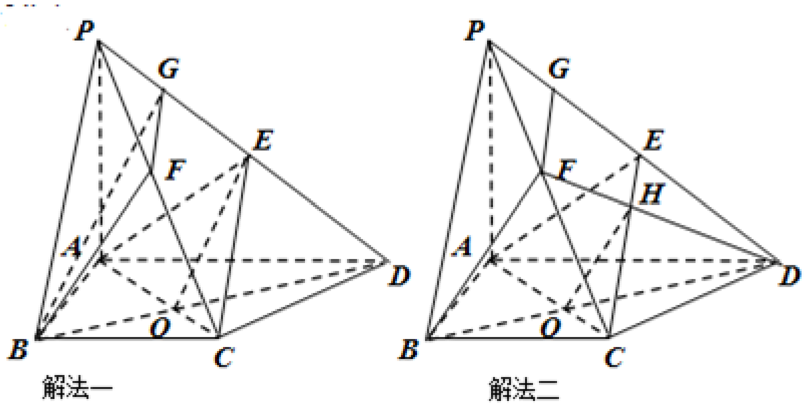


【答案】证明：(1)连结BC_1，取 AB 中点E'，
$\because$侧面AA_1C_1C是菱形，AC_1与A_1C交于点 O，$\therefore O$为AC_1的中点，
$\because E'$是 AB 的中点，$\therefore OE'//BC_1$；$\because OE'\not\subset$平面BCC_1B_1，$BC_1\subset$平面BCC_1B_1，
$\therefore OE'//$平面BCC_1B_1，$\because OE//$平面BCC_1B_1，$\therefore E$，E'重合，$\therefore E$是 AB 中点；
(2) $\because$侧面AA_1C_1C是菱形，$\therefore AC_1\perp A_1C$，
$\because AC_1\perp A_1B$，$A_1C\cap A_1B=A_1$，$A_1C\subset$平面A_1BC，$A_1B\subset$平面A_1BC，
$\therefore AC_1\perp$平面A_1BC，$\because BC\subset$平面A_1BC，$\therefore AC_1\perp BC$.
【解析】本题考查空间中直线与直线之间的位置关系，直线与平面平行的性质.
(1)利用同一法，首先通过连接对角线得到中点，进一步利用中位线，得到线线平行，进一步利用线面平行的判定定理，得到结论.
(2)利用菱形的对角线互相垂直，进一步利用线面垂直的判定定理，得到线面垂直，最后转化成线线垂直.

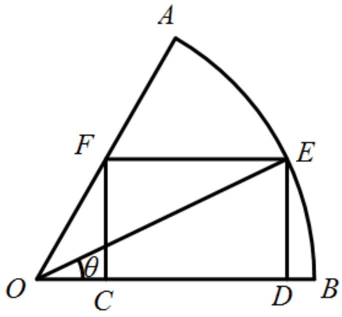
21. 如图所示四棱锥$P-ABCD$中，$PA\perp$底面 $ABCD$，四边形 $ABCD$ 中，$AB\perp AD$，$BC//AD$，$PA=AB=BC=2$，$AD=4$，E 为 PD 的中点，F 为 PC 中点.
(Ⅰ)求证：$CD\perp$平面 PAC；(Ⅱ)求证：$BF//$平面 ACE；(Ⅲ)求直线 PD 与平面 PAC 所成的角的正弦值.



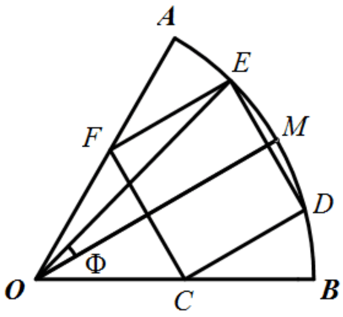
【答案】(Ⅰ)证明：因为$PA\perp$底面 ABCD，$CD\subset$面 ABCD，所以$PA\perp CD$，
又因为直角梯形 ABCD 中，
$AC=2\sqrt{2},CD=2\sqrt{2}$，
所以$AC^2+CD^2=AD^2$，即$AC\perp CD$，
又$PA\cap AC=A$，所以$CD\perp$平面 PAC；
(Ⅱ)解法一：如图，连接 BD，交 AC 于 O，取 PE 中点 G，连接 BG，FG，EO，
则在$\triangle PCE$中，$FG//CE$，
又$EC\subset$平面 ACE，$FG\not\subset$平面 ACE，所以$FG//$平面 ACE，因为$BC//AD$，所以$\frac{BO}{OD}=\frac{GE}{ED}$，则$OE//BG$，



又$OE\subset$平面 ACE，$BG\not\subset$平面 ACE，所以$BG//$平面 ACE，
又$BG\cap FG=G$，所以平面$BFG//$平面 ACE，因为$BF\subset$平面 BFG，所以$BF//$平面 ACE.
解法二：如图，连接 BD，交 AC 于 O，取 PE 中点 G，连接 FD 交 CE 于 H，连接 OH，则$FG//CE$，
在$\triangle DFG$中，$HE//FG$，则$\frac{GE}{ED}=\frac{FH}{HD}=\frac{1}{2}$，在底面 ABCD 中，$BC//AD$，所以$\frac{BO}{OD}=\frac{BC}{AD}=\frac{1}{2}$，
所以$\frac{FH}{HD}=\frac{BO}{OD}=\frac{1}{2}$，故 $BF//OH$，又$OH\subset$平面 ACE，$BF\not\subset$平面 ACE，
所以$BF//$平面 ACE.
(Ⅲ)由(Ⅰ)可知，$CD\perp$平面 PAC，所以$\angle DPC$为直线 PD 与平面 PAC 所成的角，
在$Rt\triangle PCD$中，$CD=2\sqrt{2},PD=\sqrt{PA^2+AD^2}=2\sqrt{5}$，所以$\sin\angle DPC=\frac{CD}{PD}=\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$，
所以直线 PD 与平面 PAC 所成的角的正弦值为$\frac{\sqrt{10}}{5}$.
【解析】本题考查线面垂直、线面平行，考查线面角，解题的关键是掌握线面垂直、线面平行的判定方法，正确找出线面角.
(Ⅰ)证明$CD\perp$平面 PAC，证明$PA\perp CD$，$AC\perp CD$即可；
(Ⅱ)解法一：连接 BD，交 AC 于 O，取 PE 中点 G，连接 BG，FG，EO，证明平面$BFG//$平面 ACE，即可证得$BF//$平面 ACE；
解法二：如图，连接 BD，交 AC 于 O，取 PE 中点 G，连接 FD 交 CE 于 H，连接 OH，则证明$BF//OH$，即可证得$BF//$平面 ACE；
(Ⅲ)确定$\angle DPC$为直线 PD 与平面 PAC 所成的角，在$Rt\triangle PCD$中，即可求得直线 PD 与平面 PAC 所成的角的正弦值.
22. 扇形 AOB 中心角为$60°$，所在圆半径为$\sqrt{3}$，它按如下(Ⅰ)(Ⅱ)两种方式有内接矩形 CDEF.
(Ⅰ)矩形 CDEF 的顶点 C、D 在扇形的半径 OB 上，顶点 E 在圆弧 AB 上，顶点 F 在半径 OA 上，设$\angle EOB=\theta$；
(Ⅱ)点 M 是圆弧 AB 的中点，矩形 CDEF 的顶点 D、E 在圆弧 AB 上，且关于直线 OM 对称，顶点 C、F 分别在半径 OB、OA 上，设$\angle EOM=\varphi$；



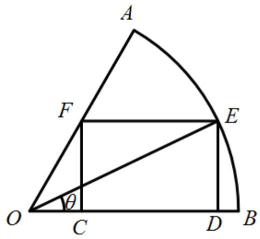
图Ⅰ



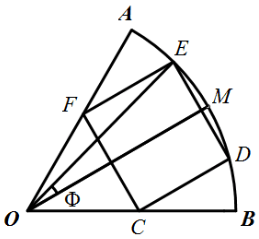
图Ⅱ

试研究(Ⅰ)(Ⅱ)两种方式下矩形面积的最大值，并说明两种方式下哪一种矩形面积最大？

【答案】解：如图，



图Ⅰ



图Ⅱ

在$Rt\triangle EOD$中，设$\angle EOD=\theta$，则$OD=\sqrt{3}\cos\theta$，$ED=\sqrt{3}\sin\theta$

又$CD=OD-OC=\sqrt{3}\cos\theta-\frac{CF}{\tan60^\circ}=\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta$，

$\therefore S_{CDEF}=ED\cdot CD=\sqrt{3}\sin\theta(\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta)=3\sin\theta\cos\theta-\sqrt{3}\sin^2\theta=\frac{3}{2}\sin2\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\cos2\theta)=$

$\sqrt{3}\sin(2\theta+\frac{\pi}{6})-\frac{\sqrt{3}}{2}$. 当$2\theta+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即$\theta=\frac{\pi}{6}$时，$S_{最大}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(Ⅱ)令 ED 与 OM 的交点为 N，FC 与 OM 的交点为 P，则$EN=\sqrt{3}\sin\varphi$，

于是$ED=2\sqrt{3}\sin\varphi$，又$CD=PN=ON-OP=\sqrt{3}\cos\varphi-\frac{FP}{\tan30^\circ}=\sqrt{3}\cos\varphi-3\sin\varphi$，

$\therefore S_{CDEF}=ED\cdot CD=2\sqrt{3}\sin\varphi(\sqrt{3}\cos\varphi-3\sin\varphi)=3\sin2\varphi-3\sqrt{3}(1-\cos2\varphi)=6\sin(2\varphi+\frac{\pi}{3})-3\sqrt{3}$.

当$2\varphi+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，即$\varphi=\frac{\pi}{12}$时，$y$ 取得最大值为：$6-3\sqrt{3}$.

$\because\frac{\sqrt{3}}{2}>6-3\sqrt{3}$，(Ⅰ)(Ⅱ)两种方式下矩形面积的最大值为方式(Ⅰ).

【解析】(Ⅰ)如图先用所给的角将矩形的面积表示出来，建立三角函数模型，再根据所建立的模型利用三角函数的性质求最值.

(Ⅱ)先用所给的角将矩形的面积表示出来，建立三角函数模型，再根据所建立的模型利用三角函数的性质求最值.然后比较面积的最大值，得到结果即可.

本题考查在实际问题中建立三角函数模型，求解问题的关键是根据图形建立起三角模型，将三角模型用所学的恒等式变换公式进行化简.