2021 年新高考Ⅰ卷数学应用能力的考查*

广东省广州市第九十七中学 (510288) 徐进勇 叶玉茵

《普通高中数学课程标准(2017 年版)》中提出,要"强调数学与生活以及其他学科的联系,提升学生应用数学解决实际问题的能力","不断引导学生感悟数学的科学价值、应用价值、文化价值和审美价值".《中国高考评价体系》中指出,高考评价体系主要由"一核""四层""四翼"三部分内容组成.其中"四翼"为考查要求,即"基础性、综合性、应用性、创新性",是素质教育的评价维度在高考中的体现.素质教育培养出的合格人才应该能够学以致用,能够探索并解决日常生活、学术科研、国家发展乃至人类社会所面临的各种问题,以具备良好的实际问题解决能力."数学应用"是一个比较宽泛的概念,既有将数学知识在日常实际的应用,还表现在数学作为工具学科,和其他学科有着紧密的联系,在自然科学乃至人文科学中都有广阔的交叉应用领域,以及数学学科内部知识之间的关联与交互.2021 年新高考数学Ⅰ卷落实高考内容改革总体要求,试题突出基本概念与核心问题,突出数学本质,重视理性思维,坚持素养导向、能力为重的命题原则,倡导理论联系实际、学以致用,体现数学的应用价值.

1 问题情境是数学应用的有效载体

正如课程标准所强调:"数学核心素养是在学生与情境、问题的有效互动中得到提升的."《中国高考评价体系说明》中明确提出:"将问题情境作为高考的考查载体","问题情境是实现'价值引领、素养导向、能力为重、知识为基'的综合考查的载体.""问题情境"指的是真实的问题背景,是以问题或任务为中心构成的活动场域."情境活动"是指人们在情境中所进行的解决或完成任务的活动.高考评价体系中的"四层"考查内容和"四翼"考查要求,是通过问题情境和情境活动两类载体来实现的,即通过选取适宜的素材,再现学科理论产生的场景或是呈现现实中的问题情境,让学生在真实的背景下运用必备知识和关键能力去解决实际问题,全面综合展现学科素养水平.高考数学科将试题的问题情境分为三类:课程学习情境,探索创新情境和社会实践情境.

1.1 课程学习情境

第 8 题 有 6 个相同的球,分别标有数字 1,2,3,4,5,6,从中有放回的随机取两次,每次取 1 个球.甲表示事件"第一次取出的球的数字是 1",乙表示事件"第二次取出的球的数字是 2",丙表示事件"两次取出的球的数字之和是 8",丁表示事件"两次取出的球的数字之和是 7",则( ).

A. 甲与丙相互独立　　B. 甲与丁相互独立

C. 乙与丙相互独立　　D. 丙与丁相互独立

思路分析: 按照相互独立定义,设 A,B 为两个事件,若 $P(AB)=P(A)P(B)$,则称事件 A 与事件 B 相互独立.所以先算出:$P(甲)=\frac{1}{6}$,$P(乙)=\frac{1}{6}$,$P(丙)=\frac{5}{36}$,$P(丁)=\frac{1}{6}$;再计算 $P(甲丙)=0$,$P(甲丁)=\frac{1}{36}$,$P(乙丙)=\frac{1}{36}$,$P(丙丁)=0$.从而可得 $P(甲丁)=\frac{1}{36}=P(甲)P(丁)$.

评析: 以数学中常用的摸球问题为背景,较好地考查了学生应用概念进行推理的关键能力与素养.课程学习情境关注学生通过学习掌握的知识基础,包括数学概念、原理、运算、逻辑推理等问题情境.

1.2 探索创新情境

第 16 题 某校学生在研究民间剪纸艺术时,发现剪纸时经常会沿纸的某条对称轴把纸对折.规格为 $20\text{dm}\times12\text{dm}$ 的长方形纸,对折 1 次共可以得到 $10\text{dm}\times12\text{dm}$,$20\text{dm}\times6\text{dm}$ 两种规格的图形,它们的面积之和 $S_1=240\text{dm}^2$,对折 2 次共可以得到 $5\text{dm}\times12\text{dm}$,$10\text{dm}\times6\text{dm}$,$20\text{dm}\times3\text{dm}$ 三种规格的图形,它们的面积之和 $S_2=180\text{dm}^2$,以此类推.则对折 4 次共可以得到不同规格图形的种数为________;如果对折 n 次,那么 $\sum_{k=1}^{n}S_k=$________ dm^2.

思路分析: 可采取由特殊到一般的探究方式,逐步明晰题意,发现规律.

对折 1 次,可得不同规格图形的种数为 2,面积之和为 $S_1=2\times120$;对折 2 次,可得不同规格图形的

* 本文系广东省教育研究院中小学数学教学研究专项课题"文化视角下高中数学应用素材开发的实践研究"(立项编号 GDJY-2020-A-s100)阶段成果.

万方数据

种数为 3，面积之和为 $S_2=3\times60$；对折 3 次，可得不同规格图形的种数为 4，面积之和为 $S_3=4\times30$；对折 4 次，可得不同规格图形的种数为 5，面积之和为 $S_4=5\times15$；…；对折 n 次，可得不同规格图形的种数为 $n+1$，面积之和为 $S_n=(n+1)\times120\times(\frac{1}{2})^{n-1}$.

所以 $\sum\limits_{k=1}^{n}S_k=2\times120+3\times120\times\frac{1}{2}+4\times120\times(\frac{1}{2})^2+\cdots+(n+1)\times120\times(\frac{1}{2})^{n-1}=120\left[2+3\times\frac{1}{2}+4\times(\frac{1}{2})^2+\cdots+(n+1)\times(\frac{1}{2})^{n-1}\right]$，错位相减可得 $\sum\limits_{k=1}^{n}S_k=240(3-\frac{n+3}{2^n})$.

评析：以我国传统文化剪纸艺术为背景，让学生体验数学问题的探究过程，重点考查学生分析归纳与演绎推理的思维能力. 探索创新情境关注学科知识的深入探索与思想方法的创新，包括数学探究、数学创新、数学实验等问题情境.

1.3　社会实践情境

第 18 题　某学校组织“一带一路”知识竞赛，有 A，B 两类问题. 每位参加比赛的同学先在两类问题中选择一类并从中随机抽取一个问题回答，若回答错误则该同学比赛结束；若回答正确则从另一类问题中再随机抽取一个问题回答，无论回答正确与否，该同学比赛结束. A 类问题中的每个问题回答正确得 20 分，否则得 0 分；B 类问题中的每个问题回答正确得 80 分，否则得 0 分. 已知小明能正确回答 A 类问题的概率为 0.8，能正确回答 B 类问题的概率为 0.6，且能正确回答问题的概率与回答次序无关.

(1) 若小明先回答 A 类问题，记 X 为小明的累计得分，求 X 的分布列；

(2) 为使累计得分的期望最大，小明应选择先回答哪类问题？并说明理由.

评析：以“一带一路”知识竞赛为背景，考查考生对概率统计基本知识的理解与应用，体现数学在“决策”中所发挥的指导作用. 社会实践情境关注数学与其他学科和社会生活实际的关联，包括生活生产实际、科学研究等问题情境.

2021 年新高考数学 Ⅰ 卷对这三种情境均有体现，体现了情境是数学应用的有效载体. 我们可以通过阅读理解题意，建立数学模型，进行推理运算，作出合理判断等方式，建立数学知识、思想方法等与理论问题或实际问题之间的联系，将数学作为解决问题的工具，突出数学的应用之美.

2　问题开放是数学应用的真实表现

高考评价体系在应用性的考查要求中强调“真懂会用”，要增加开放性试题，营造开放的情境，鼓励学生独立发表见解，要通过提供恰当的材料，命制条件开放、解题方法多样、答案不唯一的试题，增强试题的开放性和探究性，引导学生打破常规进行独立思考和判断，提出解决问题的方案.

第 19 题　记 ΔABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，已知 $b^2=ac$，点 D 在边 AC 上，$BD\sin\angle ABC=a\sin C$. (1) 证明：$BD=b$；　(2) 若 $AD=2DC$，求 $\cos\angle ABC$.

解法探究　对于第(2)问，可有如下思路：

思路 1：(三角法) 如图 1，由条件可知 $DB=b$，$DA=\frac{2}{3}b$，$DC=\frac{1}{3}b$，根据 $\cos\angle ADB=-\cos\angle BDC$，可得 $\frac{(\frac{2}{3}b)^2+b^2-c^2}{2\times\frac{2}{3}b^2}=-\frac{(\frac{1}{3}b)^2+b^2-a^2}{2\times\frac{1}{3}b^2}$，将 $b^2=ac$ 代入可得 $\begin{cases}c=3a,\\b^2=3a^2,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}c=\frac{2}{3}a,\\b^2=\frac{2}{3}a^2,\end{cases}$ 再通过余弦定理可得 $\cos\angle ABC=\frac{7}{6}$ (舍)，或 $\cos\angle ABC=\frac{7}{12}$.

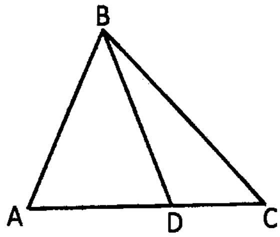

图 1

思路 2：(向量法) 因为 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$，两边平方可得 $b^2=\frac{1}{9}c^2+\frac{4}{9}a^2+\frac{4}{9}ac\cdot\cos\angle ABC$，即 $ac=\frac{1}{9}c^2+\frac{4}{9}a^2+\frac{4}{9}ac\cdot\cos\angle ABC$ (1)，又 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$，两边平方可得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos\angle ABC$，即 $ac=a^2+c^2-2ac\cdot\cos\angle ABC$ (2). 由(1)(2)可得 $c=3a$ 或 $c=\frac{2}{3}a$. 下同思路 1.

思路 3：(坐标法) 如图 2，建立以 D 为原点的直角坐标系，并设 $B(x,y)$，$A(-\frac{2}{3}b,0)$，$C(\frac{1}{3}b,0)$，于是有

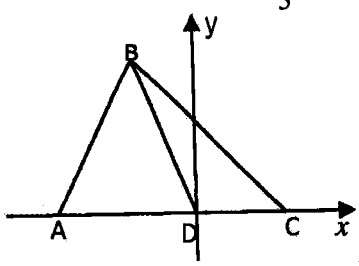

图 2

$\begin{cases} x^2+y^2=b^2, \\ b^2=\sqrt{(x-\frac{1}{3}b)^2+y^2}\sqrt{(x+\frac{2}{3}b)^2+y^2}, \end{cases}$ 解方程组得 $x=-\frac{7}{12}b$ 或 $x=\frac{7}{6}b$，从而 $b^2=\frac{2}{3}a^2$ 或 $b^2=3a^2$. 下同思路1.

思路4:(平面几何法) 如图3，过 A,D 分别作 BC 边垂线，垂足分别为 E,F.

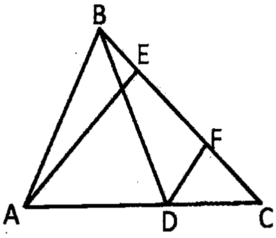

图3

设 $CF=x$，则 $EF=2x$，$BE=a-3x$，$BF=a-x$，勾股定理可得 $DF^2=\frac{1}{9}b^2-x^2$，$AE^2=9DF^2=b^2-9x^2$. 在 $Rt\Delta AEB$ 中，有 $c^2=(b^2-9x^2)+(a-3x)^2$，化简为 $6ax=a^2+b^2-c^2$ (1). 又 $DF^2=\frac{1}{9}b^2-x^2=BD^2-BF^2=b^2-(a-x)^2$，化简为 $2ax=a^2-\frac{8}{9}b^2$ (2). 由(1)(2)可得 $\begin{cases} c=3a, \\ x=-\frac{5}{18}c \end{cases}$ (舍)，或 $\begin{cases} c=\frac{2}{3}a, \\ x=\frac{11}{36}c. \end{cases}$ 所以 $BE=a-3x=\frac{7}{12}c$. 从而在 $Rt\Delta AEB$ 中，$\cos\angle ABC=\frac{BE}{AB}=\frac{7}{12}$.

上述多种解题方法综合反映数学知识间的有机联系，体现数学结构的整体性. 突出解题“从无到有”的一般思路：无图画图、无系建系、无参设参、无数解数. 另外第21题第(2)问求两直线的斜率之和，要求学生运用解析几何的基本思想方法分析问题和解决问题，考查了学生在开放的情境中发现主要矛盾的能力.

3 数学表达是数学应用的具体形式

数学应用主要表现在“用数学语言表达世界”. 数学表达能力不仅包括能用口头语言或书面语言沟通交流的基本能力，还包括能通过数学语言表达数学思维与现实世界的重要能力. 能够准确、严谨地用数学语言表达数学思想，描述现实事物，是数学应用能力的重要组成部分.

第17题 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+1, n\text{为奇数}, \\ a_n+2, n\text{为偶数}. \end{cases}$ (1)记 $b_n=a_{2n}$，写出 b_1,b_2，并求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式；(2)求 $\{a_n\}$ 的前20项和.

思路分析:(1)易求出 $b_1=2,b_2=5$，再算出 $b_3=8$，据此可以猜想出数列 $\{b_n\}$ 是等差数列，由此完成证明. 这样既能理解项与项的关系，也为下一步解题指明方向. 因 $b_{n+1}-b_n=a_{2n+2}-a_{2n}=a_{2n+1}+1-a_{2n}=a_{2n}+3-a_{2n}=3$，得 $\{b_n\}$ 是等差数列，从而 $b_n=3n-1$.

(2)由 $a_{2n}=a_{2n-1}+1$，得 $a_{2n-1}=a_{2n}-1$，于是求 $\{a_n\}$ 前20项和可转化为对奇数项和偶数项分别求和 $S_{20}=(a_1+a_3+\cdots+a_{19})+(a_2+a_4+\cdots+a_{20})=2(a_2+a_4+\cdots+a_{20})-10$，再由(1)实施转化，可得 $S_{20}=2(b_1+b_2+\cdots+b_{10})-10=310-10=300$.

评析:此题关键是读懂题意，理解数学语言所表达的真实含义，主要表现在正确理解 a_{n+1} 与 a_n 的递推关系和由 $b_n=a_{2n}$ 产生的数列间联系，并联想到等差数列模型，最后利用等差数列的性质把思维过程叙述出来，从而解决问题. 试题考查了学生数学抽象、逻辑推理、数学建模素养.

数学的语言就是数学模型. 数学高考落实应用性的考查要求，就要引导学生通过数学学习，在日常生活中以及学习过程中，能够发现身边事物或者新的课程学习情境与数学的关系，针对这些关联提出问题，并能够将这些问题抽象成为可以解释的数学模型，并用数学语言进行描述和表达.

参考文献

[1]中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版)[M]. 人民教育出版社，2018.

[2]教育部考试中心. 中国高考评价体系(2019年版)[M]. 人民教育出版社，2019，12.

[3]赵轩，任子朝，翟嘉祺. 新高考数学应用能力考查研究[J]. 数学通报，2021(03)，22-24.

[4]任子朝，赵轩，郭学恒. 基于高考评价体系的关键能力考查[J]. 数学通报，2020(08)，15-24.

例说利用构造法培育学生的逻辑推理核心素养

浙江省湖州新世纪外国语学校莲花庄校区 (313000) 孙 平

数学核心素养是学生通过数学的学习、反思、积累、升华孕育出来的，面对复杂的、不确定的现实情境和问题时，能够综合运用特定的数学概念、知识、技能、思维模式、探究技能等，以积极的态度、科

万方数据