例谈高考圆锥曲线的几个考向

◉北京工业大学附属中学　杨冬梅

圆锥曲线是解析几何的核心内容，也是高考命题的核心考点之一，从数学核心素养的角度来看，该考点主要考查逻辑推理能力和数学运算能力.那么，从圆锥曲线的内容来看，高考对圆锥曲线的考查主要涉及哪些问题呢？以下作一分析！

一、考查圆锥曲线方程的求法

学习圆锥曲线从会求圆锥曲线的方程开始，高考对圆锥曲线的考查也是如此，此类问题往往出现在选择题或解答题的第一小问中，难度中等.主要考查圆锥曲线定义和待定系数法的应用.

例1　已知 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$ 是椭圆 C 的两个焦点，过 F_2 的直线与 C 相交，交点为 A，B 两点，且满足 $|AF_2|=2|F_2B|$，$|AB|=|BF_1|$，那么椭圆 C 的方程是(　　).

分析：本题可依据椭圆的定义和余弦定理，通过解三角形来求出标准方程中的参数.

解法1：如图1，由已知可设 $|F_2B|=n$，则 $|AF_2|=2n$，$|BF_1|=|AB|=3n$，由椭圆的定义有 $2a=|BF_1|+|BF_2|=4n$，所以 $|AF_1|=2a-|AF_2|=2n$.

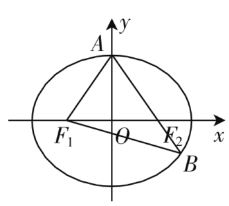

图1

在 $\triangle AF_1B$ 中，根据余弦定理可得 $\cos\angle F_1AB=\dfrac{4n^2+9n^2-9n^2}{2\cdot 2n\cdot 3n}=\dfrac{1}{3}$.

在 $\triangle AF_1F_2$ 中，用余弦定理建立方程 $4n^2+4n^2-2\cdot 2n\cdot 2n\cdot\dfrac{1}{3}=4$，可解得 $n=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

所以 $2a=4n=2\sqrt{3}$，所以 $a=\sqrt{3}$，所以 $b^2=a^2-c^2=3-1=2$，所以椭圆 C 的方程是 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$.

解法2：由已知可设 $|F_2B|=n$，则 $|AF_2|=2n$，$|BF_1|=|AF_1|=3n$，根据椭圆的定义有 $2a=|BF_1|+|BF_2|=4n$，所以 $|AF_1|=2a-|AF_2|=2n$.

在 $\triangle AF_1F_2$ 和 $\triangle BF_1F_2$ 中，由余弦定理得

$$\begin{cases}4n^2+4-2\cdot 2n\cdot 2\cdot\cos\angle AF_2F_1=4n^2,\\ n^2+4-2\cdot n\cdot 2\cdot\cos\angle BF_2F_1=9n^2.\end{cases}$$

又因为 $\angle AF_2F_1$，$\angle BF_2F_1$ 互补，所以 $\cos\angle AF_2F_1+\cos\angle BF_2F_1=0$，将上面两式消去 $\cos\angle AF_2F_1$，$\cos\angle BF_2F_1$，得 $3n^2+6=11n^2$，于是可解得 $n=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $2a=4n=2\sqrt{3}$，所以 $a=\sqrt{3}$，所以 $b^2=a^2-c^2=3-1=2$，所以椭圆 C 的方程是 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$.

点评：本题重点考查利用定义法求椭圆标准方程，同时也考查了椭圆的简单性质，从解题方法层面上看，考查了数形结合思想和转化与化归思想，从命题的形式上看，它是一个与解三角形交汇的小综合题，体现了高考命题一题多考的原则.同时，该题体现了直观想象、逻辑推理等数学素养在高考命题中的落实，是一道经得起推敲的好题，这也体现了圆锥曲线中档题今后的命题趋势.

二、考查圆锥曲线的性质

圆锥曲线主要包括曲线的离心率，准线和双曲线的渐近线，以及圆锥曲线的图形的对称性，尤其以离心率的计算问题最为常见，一般出现在选择题或填空题中，难度偏易或中等.

例2　(1)已知 F 是双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点，O 是坐标原点，以 OF 为直径画一个圆，此圆与圆 $x^2+y^2=a^2$ 交于 P，Q 两点.且满足 $|PQ|=|OF|$，那么双曲线 C 的离心率的值是(　　).

(2)(2019年高考江苏卷)平面直角坐标系 xOy 中，双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 经过点 $(3,4)$，那么此双曲线的渐近线方程为______.

解析：(1)设 PQ 与 x 轴交于点 A，由对称性可知 $PQ\perp x$ 轴，又因为 $|PQ|=|OF|=c$，所以 $|PA|=\dfrac{c}{2}$，所以 PA 为以 OF 为直径的圆的半径，所以

$|OA|=\frac{c}{2}$,所以 $P\left(\frac{c}{2},\frac{c}{2}\right)$.

又 P 点在圆 $x^2+y^2=a^2$ 上,所以 $\frac{c^2}{4}+\frac{c^2}{4}=a^2$,即 $\frac{c^2}{2}=a^2$,所以 $e^2=\frac{c^2}{a^2}=2$.所以 $e=\sqrt{2}$.

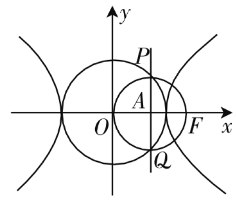

图 2

(2)由已知得 $3^2-\frac{4^2}{b^2}=1$,解得 $b=\sqrt{2}$ 或 $b=-\sqrt{2}$.

因为 $b>0$,所以 $b=\sqrt{2}$.因为 $a=1$,所以双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{2}x$.

三、考查与平面向量或平面几何的综合

解析几何其实质是用代数的方法解决几何问题,问题的解决往往离不开几何图形的性质,而平面向量是数与形的统一,其可以与其他几乎任何知识交汇.将圆锥曲线与平面向量或平面几何交汇,一方面凸显命题的新颖性,另一方面体现了命题的综合性,这一特点在高考复习中应引起高度重视.

例 3 已知 F_1,F_2 分别是双曲线 C:$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右两个焦点,有一条经过 F_1 的直线,它与双曲线 C 的两条渐近线相交,交点分别为 A,B 两点.如果 $\overrightarrow{F_1A}=\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{F_1B}\cdot\overrightarrow{F_2B}=0$,那么该双曲线 C 的离心率为______.

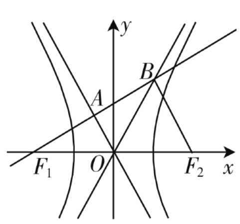

图 3

解析:如图 3,由 $\overrightarrow{F_1A}=\overrightarrow{AB}$,得 $F_1A=AB$.又 $OF_1=OF_2$,得 OA 是 $\triangle F_1F_2B$ 的中位线,即 $BF_2\parallel OA$,$BF_2=2OA$.

由 $\overrightarrow{F_1B}\cdot\overrightarrow{F_2B}=0$,得 $F_1B\perp F_2B$,所以 $OA\perp F_1A$,所以 $OB=OF_1$,$\angle AOB=\angle AOF_1$,又 OA 与 OB 都是双曲线的渐近线,所以 $\angle BOF_2=\angle AOF_1$,于是 $\angle BOF_2+\angle AOB+\angle AOF_1=\pi$,所以 $\angle BOF_2=\angle AOF_1=\angle BOA=60^\circ$,又因为渐近线 OB 的斜率为 $\frac{b}{a}=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$,所以它的离心率是 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}=2$.

四、圆锥曲线的综合

对圆锥曲线的综合考查,在全国卷中出现在压轴题的位置上,主要考查和直线与圆锥曲线的位置关系有关的综合性问题,如最值问题,定值定点问题,是否存在性探究题等,体现出解析几何知识及方法与其他数学知识及方法的综合运用,考题灵活多变,计算量颇大,难度也较大.

例 4 已知抛物线 C:$x^2=-2py$ 经过定点 $P(2,-1)$.

(1)求该抛物线 C 的方程和准线方程;

(2)设 O 是坐标原点,过该抛物线的焦点作一条不与 x 轴平行的直线 l,该直线与抛物线 C 相交于 M,N 两点,又直线 $y=-1$ 分别与 OM,ON 交于 A,B 两点,求证:以 AB 为直径的圆必经过 y 轴上的两个定点.

解析:(1)将 $P(2,-1)$代入抛物线 C 的方程,易得曲线 C:$x^2=-4y$,准线为 $y=1$.

(2)抛物线 C 的焦点为 $F(0,-1)$.设直线 l 的方程为 $y=kx-1(k\neq 0)$.

由 $\begin{cases}y=kx-1,\\x^2=-4y\end{cases}$ 得 $x^2+4kx-4=0$.

设 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,则 $x_1x_2=-4$.

直线 OM 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1}x$.令 $y=-1$,得点 A 的横坐标 $x_A=-\frac{x_1}{y_1}$.

同理得点 B 的横坐标 $x_B=-\frac{x_2}{y_2}$.

设点 $D(0,n)$,则 $\overrightarrow{DA}=\left(-\frac{x_1}{y_1},-1-n\right)$,$\overrightarrow{DB}=\left(-\frac{x_2}{y_2},-1-n\right)$,$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=\frac{x_1x_2}{y_1y_2}+(n+1)^2$

$$=\frac{x_1x_2}{\left(-\frac{x_1^2}{4}\right)\left(-\frac{x_2^2}{4}\right)}+(n+1)^2$$

$$=\frac{16}{x_1x_2}+(n+1)^2$$

$$=-4+(n+1)^2.$$

令 $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=0$,即 $-4+(n+1)^2=0$,则 $n=1$ 或 $n=-3$.故以 AB 为直径的圆必经过 y 轴上的定点,它们是$(0,1)$和$(0,-3)$.

点评:本题以抛物线为背景,以直线与抛物线的位置关系为平台,考查了抛物线与圆的性质,韦达定理的综合应用,同时也是一类较为常见的定点问题,对考生的转化能力和计算求解能力有着较高的要求.不过从近几年的命题来看,这类问题的思维量依然较大,但运算量在逐年减少,体现了"多一点思考,少一点计算"的命题方向.

圆锥曲线高考考什么,怎么考,我们又该如何复习,或许以上几点分析对大家有所帮助.**W**