为什么把$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$（$a$，$b$＞0）叫做“基本不等式”

1．从“数及其运算”的角度看，$\frac{a+b}{2}$是两个正数 a，b 的“平均数”；从定量几何的角度看，ab 是长为 a、宽为 b 的矩形面积，$\sqrt{ab}$就叫做两个非负数 a，b 的“几何平均”。因此，不等式中涉及的是代数、几何中的“基本量”。

2．有多种等价形式：

代数——涉及两个正数的运算，也就是通过加、减、乘、除、乘方、开方等运算而产生的变化。在对运算结果之间的大小关系比较中就可以得到各种表现形式；

几何——周长相等的矩形中，正方形的面积最大；或者，以 $a+b$ 为斜边的直角三角形中，等腰直角三角形的高最长；或者，更直观地，等圆中，弦长不大于直径；……

函数——本质上是函数凹凸性的反映。例如，可以直接通过函数$y=\frac{1}{x}$，$y=\sqrt{x}$，$y=x^2$等学生最熟悉的函数的凹凸性导出公式；或者，利用函数图像的切线（本质上是“以直代曲”），例如，过点(1,1)作曲线$y=\sqrt{x}$的切线，切线方程为$y=\frac{1}{2}(x+1)$，曲线$y=\sqrt{x}$总位于切线的下方，故有，$\sqrt{x}\leq\frac{1}{2}(x+1)$。令$x=\frac{a}{b}$，代入化简即得重要不等式。

也可以这样考虑：在一个平面内固定一条直线 $x+y=2A$，考察曲线族 $xy=c$（这里 c 是参数），画个图就可以看出，和给定直线有公共点，且使 c 取最大值的曲线，是和直线相切于（A，A）的那条曲线，这时 $c=A^2$，于是 $xy\leq\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$。

3．证明方法的多样性

从上所述已经表明，“基本不等式”确是与重要的数学概念和性质相关，体现基础知识的联系性，表述形式简洁、流畅且好懂，而且从上述联系性中，事实上也已经给出了证明的各种思路，这些思路与数学的基本概念相关，不涉及太多的技巧。

我们还可以从“平均数”的角度来构造性地证明：

设 $A=\frac{a+b}{2}$。引进一个量 $d=\frac{a-b}{2}$，则 $a=A+d$，$b=A-d$。于是

$ab=A^2-d^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-d^2$，由 $d\geq 0$ 容易得到 $\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}$。

4．可推广。我们大家都知道有 n 个正数的几何平均值不大于算术平均值的定理。这个定理的证明方法很多，由此就能培养学生的解题能力，而且能体现创造性。

值得注意的是，n 个数（不一定为正）的算术平均是一个重要的最小性质，有广泛的用途，特别是在统计中，就是对于某个未知量 x，我们通过测量获得了它的 n 个观测值 x_i（$i=1$，2，…，n）。由于测量误差，这些值会略有不同，那么 x 取什么值才最可信呢？数学王子高斯的想法是：用 $x-x_i$ 表示观测值 x_i 与理想值 x 之间的偏差（可正可负），可以把那个使总偏差最小的值作为理想值的最佳估计。数学中，习惯上把$(x-x_i)^2$ 作为不精确性的适当的度量，这样问题就转化为求使 $\sum_{i=1}^{n}(x-x_i)^2$ 的最小值。非常凑巧，这个值恰好就是这 n 个观测值的算术平均——这是重要的高斯“最小二乘法”的出发点。

基本不等式的教学过程概录

1．借助问题情境（赵爽弦图），得到 $a^2+b^2>2ab$。老师提示：当 $a=b$ 时，有 $a^2+b^2=2ab$。

通过课件，动态演示面积变化情况，直观展示等号成立的条件。

师：当 a，b 为任意实数时，上式还成立吗？你能给出它的证明吗？

生：利用完全平方，$(a-b)^2\geqslant 0$，即 $a^2-2ab+b^2\geqslant 0$，得到 $a^2+b^2\geqslant 2ab$。

师：还有什么方法？（片刻后）证明不等式的常用方法是“作差”。

证明：$\because a^2+b^2-2ab=(a-b)^2\geq 0, \therefore a^2+b^2\geq 2ab$.

由证明过程可知：不等式 $a^2+b^2\geq 2ab$ 恒成立.

师：通过刚才的探究，我们得到了一个对任意实数都成立的不等式 $a^2+b^2>2ab$。特别是 $a=b$ 时，$a^2+b^2=2ab$；反过来 $a^2+b^2=2ab$ 时，定有 $a=b$。所以我们说当且仅当 a=b 时取等号。

2．探究新知

师：当 $a>0$，$b>0$ 时，如果用 $\sqrt{a},\sqrt{b}$ 替换上述结论中的 a，b，能得到什么结论？

生：可得 $a+b\geq 2\sqrt{ab}\quad (a>0,b>0)$。

师：**你能证明这个不等式吗？什么时候取等号？**

学生模仿已有证明，用综合法。

教师让学生阅读教科书，并填空：

要证 $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$，　　　　　　　　　①

只要证$a+b\geq$________　　　　　②

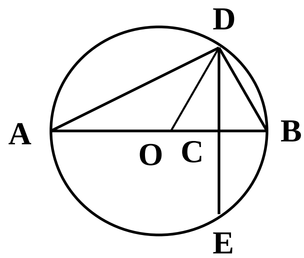
要证②,只要证$a+b-$________≥ 0　　③

要证③,只要证$(____-____)^2\geq 0$　　④

显然, ④是成立的。当且仅当 $a=b$ 时，④中的等号成立 。

再阅读课本的“探究”，作出基本不等式的几何解释。

教师对基本不等式做出如下说明：



（1）注意基本不等式成立的条件；

（2）注意基本不等式的结构：

两个正数之积与两数之和之间的不等关系。

（3）注意等号成立的条件。

3．知识应用

例 1 判断下列说法是否正确：

（1）若 $x>0$，则 $x+\frac{1}{x}\geqslant 2$；

（2）若 $x<0$，则 $x+\frac{1}{x}\leqslant -2$；

（3）若 $ab\neq 0$，则 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2$；

（4）若 $ab=3$，则 $a+b\geqslant 2\sqrt{3}$。

（1）生：因为$x+\frac{1}{x}-2=\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2\geqslant 0$，所以$x+\frac{1}{x}\geqslant 2$。

（2）生：$x+\frac{1}{x}+2=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2\geqslant 0$，所以……？

师：能写为$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$吗？

生：哦，不能！应该是

$-x-\frac{1}{x}-2=\left(\sqrt{-x}+\frac{1}{\sqrt{-x}}\right)^2$ **≥0，所以** $x+\frac{1}{x}$ **≤－2。**

教师提醒：注意，利用基本不等式，最基本的是要求两个数大于0。本题是经过变形可以利用基本不等式。

（3）当 ab **＞0时，** $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$ **≥2；当** ab **＜0时，** $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$ **≤－2。**

教师补充：实际上，概括一下就是前面（1）和（2）。

（4）生：当 a **＞0，** b **＞0时，** $a+b$ **≥2** $\sqrt{ab}$ **=2** $\sqrt{3}$ **；当** a **＜0，** b **＜0时，……**

师：怎么还不会？看一下（3）的解答。

生：哦，因为－ a **－** b **≥2** $\sqrt{(-a)(-b)}$ **=2** $\sqrt{3}$ **，所以** $a+b$ **≤－2** $\sqrt{3}$ **。**

师：通过这几个例题可以知道，在基本不等式 $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ **中，要求** a**，**b **大于0。**

例2在下列函数中，最小值是2的是（　）

（A） $y=\frac{x}{5}+\frac{5}{x}$ （x≠0）　　　（B） $y=\lg x+\frac{1}{\lg x}$ （1＜x＜10）

（C） $y=3^x+3^{-x}$ （x∈**R**）　　　（D） $y=\sin x+\frac{1}{\sin x}$ （0＜x＜$\frac{\pi}{2}$）

生1： $y=\frac{x}{5}+\frac{5}{x}=\frac{x^2+25}{5x}$，因为 x^2+25＞0，5x 既可以大于0，也可以小于0，所以 y 的值可以小于0。所以选项（A）不对。

生2：因为 1＜x＜10，所以 lg$x$＞0。根据基本不等式，$\lg x+\frac{1}{\lg x}$ ≥ $2\sqrt{\lg x\cdot\frac{1}{\lg x}}$ =2。所以选项（B）正确。

生 3：因为对任意 x，3^x＞0，所以 3^x+3^{-x} ≥$2\sqrt{3^x\cdot 3^{-x}}$ =2。所以选

项（C）正确。

生 4：因为 $0<x<\frac{\pi}{2}$，所以 $\sin x>0$。所以 $\sin x+\frac{1}{\sin x}\geqslant 2\sqrt{\sin x\cdot\frac{1}{\sin x}}=2$。所以选项（D）正确。

师：对吗？再看看每一个函数都能取到 2 吗？

学生经过思考，得出只有选项（C）中的函数能取到 2。

师：所以，大家要注意基本不等式中等号成立的条件。

变式练习：

（1）若 $x>1$，求 $y=x+\frac{1}{x-1}$ 的最小值及取得最小值时的 x 值。

（2）求函数 $y=\frac{x^2-x+2}{x}$（$x>0$）的最小值及取最小值时的 x 的值。

（3）若 $0<x<1$，求 $f(x)=\sqrt{x(1-x)}$ 的最大值及取得最大值时的 x 值。

大部分学生在解答时遇到较大困难。教师发现时间也不够了，于是就自己讲解：

做这几个题目时，大家要注意灵活变形，就是要往基本不等式靠。如果是和的形式，就要凑出“积定”；如果是积的形式，就要凑出“和定”。这样就有

（1）因为 $x>1$，所以 $x-1>0$。所以 $y=x+\frac{1}{x-1}=(x-1)+\frac{1}{x-1}+1\geqslant 2\sqrt{(x-1)\cdot\frac{1}{x-1}}+1=3$。等号当且仅当 $x-1=\frac{1}{x-1}$，即 $x=2$ 时取得。

（2）只要将函数解析式转化为 $y=x+\frac{2}{x}-1$，就可以利用基本不等式求解了。同学们课后完成。

（3）因为 $0<x<1$，所以 $0<1-x<1$。所以

$f\left(x\right)=\sqrt{x\left(1-x\right)}\leqslant\frac{x+\left(1-x\right)}{2}=\frac{1}{2}$。

等号当且仅当 $x=1-x$，即 $x=\frac{1}{2}$时取得。

教师总结：今天我们学了很重要的基本不等式。基本不等式在求最值时很有用。从前面的几组题目可以看到，用基本不等式求最值时，首先要注意含有字母的式子必须是正的；其次，要注意观察式子的结构，和的形式要看是否有积为定值，积的形式则要看是否有和为定值；第三，一定要注意是否能取到最值，这就要看“相等”的条件是否能满足。总结起来就是：

一正，二定，三相等。

大家一定要记住了。

思考题：

（1）基本不等式简单，而且“一正、二定、三相等”也很明确，但为什么学生总是想不到？——越是简单，越接近常识，应用范围就越广泛，越需要经过一定的训练而形成习惯。

（2）在利用基本不等式求最值时，学生为什么总是丢三落四？