# 江苏省仪征中学 2019 届高三（下）数学考前全真模拟（七）答案

## 一、填空题：

1、3；2、2；3、$\dfrac{2}{3}$；4、23；5、12；6、$\lambda\leqslant 2\sqrt{2}$；7、①②④；8、$2x-4y+3=0$；

9、$\left(-1,\dfrac{1}{3}\right)$；10、$2\sqrt{41}$；11、2；12、2；13、$\dfrac{\pi}{3}$；14、874 .

## 二、解答题：

15、[解]（1）当 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 时，$\vec{a}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，所以 $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{c}|}=\dfrac{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{1\times 1}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

又 $\theta\in[0,\pi]$，因而 $\theta\in\dfrac{5\pi}{6}$；

（2）$f(x)=\lambda\vec{a}\cdot\vec{b}=\lambda\left(\sin^2 x+\sin x\cos x\right)=\dfrac{\lambda}{2}(1-\cos 2x+\sin 2x)=\dfrac{\lambda}{2}\left[1+\sqrt{2}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$，

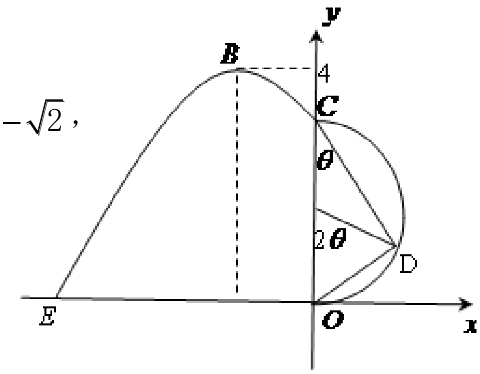
因为 $x\in\left[-\dfrac{3\pi}{8},\dfrac{\pi}{4}\right]$，所以 $2x-\dfrac{\pi}{4}\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{4}\right]$，

当 λ>0 时，$f(x)_{max}=\dfrac{\lambda}{2}(1+1)=\dfrac{1}{2}$，即 $\lambda=\dfrac{1}{2}$，

当 λ<0 时，$f(x)_{max}=\dfrac{\lambda}{2}\left(1-\sqrt{2}\right)=\dfrac{1}{2}$，即 $\lambda=-1-\sqrt{2}$，

所以 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ 或 $\lambda=-1-\sqrt{2}$ .

16、[解]　(1)略；(2) $\dfrac{2\sqrt{15}}{5}$ .




17、[解](1)因为最高点 B（-1，4），所以 A=4；

又 $E(-4,0)$，所以 $\dfrac{T}{4}=-1-(-4)=3\Rightarrow T=12$，因为 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=12\Rightarrow\omega=\dfrac{\pi}{6}$，

代入点 B（-1，4），$4=4\sin[\dfrac{\pi}{6}\times(-1)+\varphi]\Rightarrow\sin(\varphi-\dfrac{\pi}{6})=1$，

又 $0<\varphi<\pi\Rightarrow\varphi=\dfrac{2\pi}{3}$；

(2)由(1)可知：$y=4\sin(\dfrac{\pi}{6}x+\dfrac{2\pi}{3})$，$x\in[-4,0]$，得点 C $(0,2\sqrt{3})$ 即 $CO=2\sqrt{3}$，取 CO 中点 F，连结 DF，因为弧 CD 为半圆弧，

所以 $\angle DFO=2\theta,\angle CDO=90^\circ$，

即弧 $DO=2\theta\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}\theta$，则圆弧段 $DO$ 造价预算为 $2\sqrt{3}\theta$ 万元，$Rt\Delta CDO$ 中，

$CD=2\sqrt{3}\cos\theta$，则直线段 CD 造价预算为 $4\sqrt{3}\cos\theta$ 万元，

所以步行道造价预算 $g(\theta)=4\sqrt{3}\cos\theta+2\sqrt{3}\theta$，$\theta\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ .

由 $g'(x)=4\sqrt{3}(-\sin\theta)+2\sqrt{3}=2\sqrt{3}(1-2\sin\theta)$ 得当 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 时，$g'(\theta)=0$，

当 $\theta\in(0,\dfrac{\pi}{6})$ 时，$g'(x)>0$，即 $g(\theta)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{6})$ 上单调递增；

当 $\theta\in(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2})$ 时，$g'(x)<0$，即 $g(\theta)$ 在 $(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2})$ 上单调递减，

所以 $g(\theta)$ 在 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 时取极大值，也即造价预算最大值为（$6+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi$）万元.

18、[解]（1）由椭圆的离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$，则 $a=2c$，①椭圆的右准线方程 $x=\dfrac{a^2}{c}$，

由 $\dfrac{a^2}{c}=4$，则 $a^2=4c$，②，解得：$a=2$，$c=1$，$b^2=a^2-c^2=3$，∴椭圆的标准方程：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$；

（2）设直线 AB 的方程：$x=my+\dfrac{3a}{4}$，A（$x_1$，$y_1$），B（$x_2$，$y_2$），

$\begin{cases}x=my+\dfrac{3a}{4}\\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\end{cases}$，整理得：（$a^2+b^2m^2$）$y^2+\dfrac{3}{2}ab^2my-\dfrac{7}{16}a^2b^2=0$，

$y_1+y_2=-\dfrac{3ab^2m}{2(a^2+b^2m^2)}$，则 $x_1+x_2=m(y_1+y_2)+\dfrac{3a}{2}=\dfrac{3a^3}{2(a^2+b^2m^2)}$，

由 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}$，则 $\overrightarrow{OD}=(x_1+x_2,\ y_1+y_2)=\left(\dfrac{3a^3}{2(a^2+b^2m^2)},-\dfrac{3ab^2m}{2(a^2+b^2m^2)}\right)$，

则 D$\left(\dfrac{3a^3}{2(a^2+b^2m^2)},-\dfrac{3ab^2m}{2(a^2+b^2m^2)}\right)$，由 D 在椭圆的右准线上，

则 $\dfrac{3a^3}{2(a^2+b^2m^2)}=\dfrac{a^2}{c}$，整理得 $3ac=2(a^2+b^2m^2)$，∴D$\left(\dfrac{a^2}{c},-\dfrac{b^2m}{c}\right)$，则直线 PD 的斜率

$\dfrac{-\dfrac{b^2m}{c}-0}{\dfrac{a^2}{c}-\dfrac{3a}{4}}=-\dfrac{4b^2m}{4a^2-3ac}$，由 DP⊥$l$，则 $-\dfrac{4b^2m}{4a^2-3ac}=-m$，整理得 $4b^2=4a^2-3ac$，

即 $3ac=4(a^2-b^2)=4c^2$，则 $3a=4c$，∴椭圆的离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{3}{4}$，椭圆离心率 e 的值为 $\dfrac{3}{4}$.

19、[解]（1）∵$a_{n+1}=(p-1)S_n+2$（$n=1，2，…，2k-1$），

∴$a_n=(p-1)S_{n-1}+2$（$n=2，…，2k$）.

则当 $n=2，…，2k-1$ 时，两式相减，得

$a_{n+1}-a_n=(p-1)(S_n-S_{n-1})$，即 $a_{n+1}-a_n=(p-1)a_n$.

∴$a_{n+1}=pa_n$（$n=2，…，2k-1$）.

原式中，令 $n=1$，得 $a_2=(p-1)a_1+2=2(p-1)+2=2p=pa_1$.

∴$a_{n+1}=pa_n$，即 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=p$（$n=1，2，…，2k-1$），即数列$\{a_n\}$是等比数列.

（2）由（1），得 $a_n=a_1p^{n-1}$.

∴ $b_n=\frac{1}{n}\log_2(a_1a_2\cdots a_n)=\frac{1}{n}\log_2(a_1\cdot a_1p\cdot a_1p^2\cdot\ \cdots\ \cdot a_1p^{n-1})$

$=\frac{1}{n}\log_2(a_1^n\cdot p^{1+2+\cdots+n-1})=\log_2(a_1\cdot p^{\frac{n-1}{2}})=1+\frac{n-1}{2}\log_2 p=1+\frac{n-1}{2}\frac{2}{2k-1}$

$=1+\frac{1}{2k-1}(n-1)$.

（3）∵ $b_n-\frac{3}{2}=1+\frac{n-1}{2k-1}-\frac{3}{2}=\frac{2n-2k-1}{2(2k-1)}$，

∴当 $n\le k$ 时，$b_n-\frac{3}{2}<0$；当 $n\ge k+1$ 时，$b_n-\frac{3}{2}>0$.

则 $T_n=|b_1-\frac{3}{2}|+|b_2-\frac{3}{2}|+\cdots+|b_{2k-1}-\frac{3}{2}|+|b_{2k}-\frac{3}{2}|$

$=(\frac{3}{2}-b_1)+(\frac{3}{2}-b_2)+\cdots+(\frac{3}{2}-b_k)+(b_{k+1}-\frac{3}{2})+\cdots+(b_{2k}-\frac{3}{2})$

$=(b_{k+1}+b_{k+2}+\cdots+b_{2k})-(b_1+b_2+\cdots+b_k)$

$=(\frac{k}{2k-1}+\frac{k+1}{2k-1}+\cdots+\frac{2k-1}{2k-1})-(\frac{0}{2k-1}+\frac{1}{2k-1}+\cdots+\frac{k-1}{2k-1})=\frac{k^2}{2k-1}$.

20、[解](1)由 $F(x)=f(x)-g(x)=0$ 得 $(a-1)x^2-(a-1)x-1=0$，显然 $x=0$，$x=-\frac{1}{a}$ 都不是此方程的根，

当 $a=1$ 时，没有实根，则 $a\ne1$，由 $(a-1)^2+4(a-1)<0$ 得：$-3<a<1$，

故当 $a\in(-3,1]$ 时，函数 $F(x)=f(x)-g(x)$ 没有零点； ……………3 分

(2) $f'(x)=\frac{1}{x^2}$，$g'(x)=\frac{1}{(ax+1)^2}$，设它们的公共点为 $P(x_P,y_P)$，

则有 $\begin{cases} y_P=f(x_P) \\ y_P=g(x_P) \\ f'(x_P)=g'(x_P)\end{cases}$ 即 $\begin{cases} f(x_P)=g(x_P) \\ f'(x_P)=g'(x_P)\end{cases}$ 也就是 $\begin{cases} 1-\frac{1}{x_P}=\frac{x_P}{ax_P+1} \\ \frac{1}{(x_P)^2}=\frac{1}{(ax_P+1)^2}\end{cases}$

当 $ax_P+1=x_P$ 时 $1-\frac{1}{x_P}=1$，无解；当 $ax_P+1=-x_P$ 时 $1-\frac{1}{x_P}=-1$，$x_P=\frac{1}{2}$，$a=-3$； …………8 分

(3)由题得 $1-\frac{1}{e^x}\le\frac{x}{ax+1}$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立，因为 $x\ge0$，故 $1-e^{-x}\in[0,1)$，

所以 $1-\frac{1}{e^x}\ge0$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立，故 $\frac{x}{ax+1}\ge0$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立，

所以，$a\ge0$. ……………10 分

解法一：不等式 $1-e^{-x}\le\frac{x}{ax+1}$ 恒成立等价于 $(ax+1)(1-e^{-x})-x\le0$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立，

令 $h(x)=(ax+1)(1-e^{-x})-x=-\frac{ax+1}{e^x}+ax-x-1$，则 $h'(x)=\frac{ax-a+1}{e^x}+a-1$，

再设 $m(x)=h'(x$，则 $m'(x)=\dfrac{-ax+2a-1}{e^x}$，同时，$m'(0)=2a-1$，$h'(0)=0$，$h(0)=0$，

① 当 $a=0$ 时，$m'(x)=-\dfrac{1}{e^x}<$ ，则 $m(x)=h'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，$\therefore$ $h'(x)\le h'(0)=0,$

$\therefore h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单减，$\therefore$ $h(x)\le h(0)=0,$ 即 $f(e^x)\le g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立，

②当 $0<a\le\dfrac{1}{2}$ 时，$m'(x)=\dfrac{-a(x-\dfrac{2a-1}{a})}{e^x}$，因为 $-\dfrac{2a-1}{a}>0$，所以 $m'(x)<0$，

则 $m(x)=h'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，$\therefore h'(x)\le h'(0)=0,$ $\therefore$ $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单减，

$\therefore h(x)\le h(0)=0,$ 即 $f(e^x)\le g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立，

③当 $a>\dfrac{1}{2}$ 时，$m'(x)=\dfrac{-a(x-\dfrac{2a-1}{a})}{e^x}$，$\dfrac{2a-1}{a}>0$

若 $0<x<\dfrac{2a-1}{a}$，则 $m'(x)>0$，即 $m(x)=h'(x)$ 在 $(0,\dfrac{2a-1}{a})$ 上单调递增，所以 $h'(x)>h'(0)=0$

即 $h(x)$ 在 $(0,\dfrac{2a-1}{a})$ 上也单调递增，$\therefore h(x)>h(0)=0$，即 $f(e^x)\ge g(x)$，不满足条件.

综上，$f(e^x)\le g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立时，实数 $a$ 的取值范围是 $[0,\dfrac{1}{2}]$. ……………16 分

解法二：不等式 $1-e^{-x}\le\dfrac{x}{ax+1}$ 恒成立等价于 $(ax+1)(e^x-1)-e^x x\le 0$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立，

设 $h(x)=(ax+1)(e^x-1)-e^x x=e^x(ax-x+1)-(ax+1)$，则 $h'(x)=e^x(ax-x+a)-a$，

再设 $m(x)=h'(x)=e^x(ax-x+a)-a$，则 $m'(x)=e^x[(a-1)x+(2a-1)]$

同时，$m'(0)=2a-1$，$m(0)=h'(0)=0$，$h(0)=0$，

①当 $a\ge 1$ 时，$m'(0)=2a-1>0$，故函数 $h'(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的增函数所以 $h'(x)>h'(0)=0$，

所以函数 $h(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的增函数，所以当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$h(x)>h(0)=0$，

即 $f(e^x)\le g(x)$，与 $f(e^x)\le g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立不符，

②当 $0\le a\le\dfrac{1}{2}$ 时 $\dfrac{2a-1}{a-1}\ge 0$，$m'(x)=(a-1)e^x(x+\dfrac{2a-1}{a-1})<0$，故函数 $h'(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的减函数

所以 $h'(x)<h'(0)=0$，函数 $h(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的减函数，所以当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$h(x)\le h(0)=0$，

即 $f(x)\le g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立，

③当 $\frac{1}{2} < a < 1$ 时，$\frac{2a-1}{a-1} < 0$，$m'(x) = (a-1)e^x(x + \frac{2a-1}{a-1})$ 当 $x \in (0, -\frac{2a-1}{a-1})$ 时，$m'(x) > 0$，

故函数 $h'(x)$ 是 $(0, -\frac{2a-1}{a-1})$ 上的增函数所以在 $x \in (0, -\frac{2a-1}{a-1})$ 上，$h'(x) > h'(0) = 0$，

所以函数 $h(x)$ 是 $(0, -\frac{2a-1}{a-1})$ 上的增函数，所以当 $x \in (0, -\frac{2a-1}{a-1})$ 时，$h(x) > h(0) = 0$，

即 $f(e^x) \geq g(x)$，与 $f(e^x) \leq g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立不符，

综上可得，使 $f(e^x) \leq g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立实数 $a$ 的取值范围是 $[0, \frac{1}{2}]$.

## 附加题答案

21、[解]　解：(1) $\begin{bmatrix} 4 & a \\ b & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-a \\ b-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$，所以 $\begin{cases} 4-a=2 \\ b-1=-2 \end{cases}$，解得 $a=2, b=-1$，

所以 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$；　　　　　　　　　　……5 分

(2) $f(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-4 & -2 \\ 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-4)(\lambda-1)-(-2) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$，

令 $f(\lambda)=0$，则 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$.　　　　　　　　　　……10 分

22、[解]在 $\rho\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 中令 $\theta=0$，得 $\rho=1$，所以圆 $C$ 的圆心坐标为(1,0).　………3 分

∵圆 $C$ 经过点 $P\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$，所以圆 $C$ 的半径 $PC = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2 - 2\times1\times\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}} = 1$，…8 分

于是圆 $C$ 过极点，∴圆 $C$ 的极坐标方程为 $\rho = 2\cos\theta$.　……10 分

23、[解]　(1) 设参与者先在乙箱中摸球，且恰好获得奖金 $n$ 元为事件 M.

则 $P(M) = \frac{1}{3}\times\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$，即参与者先在乙箱中摸球，且恰好获得奖金 $n$ 元的概率为 $\frac{1}{4}$.(4 分)

(2) 参与者摸球的顺序有两种，分别讨论如下：

① 先在甲箱中摸球，参与者获奖金 x 可取 0，m，m＋n，

则 $P(x=0) = \frac{3}{4}$，$P(x=m) = \frac{1}{4}\times\frac{2}{3} = \frac{1}{6}$，$P(x=m+n) = \frac{1}{4}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{12}$，

$E(x) = 0\times\frac{3}{4} + m\times\frac{1}{6} + (m+n)\times\frac{1}{12} = \frac{m}{4} + \frac{n}{12}$.(6 分)

② 先在乙箱中摸球，参与者获奖金 h 可取 0，n，m＋n，

则 $P(h=0) = \frac{2}{3}$，$P(h=n) = \frac{1}{3}\times\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$，$P(h=m+n) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{12}$，

$E(h) = 0\times\frac{2}{3} + n\times\frac{1}{4} + (m+n)\times\frac{1}{12} = \frac{m}{12} + \frac{n}{3}$.(8 分)

$E(x) - E(h) = \frac{2m-3n}{12}$.

当$\frac{m}{n}>\frac{3}{2}$时，先在甲箱中摸球，再在乙箱中摸球，参与者获奖金期望值较大；

当$\frac{m}{n}=\frac{3}{2}$时，两种顺序参与者获奖金期望值相等；

当$\frac{m}{n}<\frac{3}{2}$时，先在乙箱中摸球，再在甲箱中摸球，参与者获奖金期望值较大.

答：当$\frac{m}{n}>\frac{3}{2}$时，先在甲箱中摸球，再在乙箱中摸球，参与者获奖金期望值较大；当$\frac{m}{n}=\frac{3}{2}$时，两种顺序参与者获奖金期望值相等；当$\frac{m}{n}<\frac{3}{2}$时，先在乙箱中摸球，再在甲箱中摸球，参与者获奖金期望值较大．(10 分)

24、**解**：⑴ $a_2=0, a_3=\sqrt{2}-1$；　　　　……1 分

⑵设 $f(x)=\sqrt{(x-1)^2+1}-1$，则 $a_{n+1}=f(a_n)$．

①当 $n=1$ 时，命题成立.

假设 $n=k$ 时命题成立，即 $0\le a_k\le 1$．

则当 $n=k+1$ 时

易知 $f(x)$ 在 $(-\infty,1]$ 上为减函数，从而 $0=f(1)\le f(a_k)\le f(0)=\sqrt{2}-1<1$，

即 $0\le a_{k+1}\le 1$，所以当 $n=k+1$ 时结论成立.

所以命题得证；　　　　……4 分

②先证 $a_{2n}<a_{2n+1}(n\in N^*)$

当 $n=1$ 时，$0=a_2<a_3=\sqrt{2}-1$，即 $n$=1 时命题成立.

假设 $n=k$ 时命题成立，即 $a_{2k}<a_{2k+1}(k\in N^*)$，

则当 $n=k+1$ 时

由①及 $f(x)$ 在 $(-\infty,1]$ 上为减函数，得 $a_{2k+1}=f(a_{2k})>f(a_{2k+1})=a_{2k+2}$，

故 $a_{2(k+1)}=f(a_{2k+1})<f(a_{2k+2})=a_{2(k+1)+1}$，

即当 $n=k+1$ 时，命题成立，

所以 $a_{2n}<a_{2n+1}$ 对一切 $n\in N^*$ 成立，

再证 $a_{2n}<\frac{1}{4}<a_{2n+1}(n\in N^*)$

由上可知，$a_{2n}<\sqrt{a_{2n}^2-2a_{2n}+2}-1$，即 $(a_{2n}+1)^2<a_{2n}^2-2a_{2n}+2$，因此 $a_{2n}<\frac{1}{4}$．

由 $f(x)$ 在 $(-\infty,1]$ 上为减函数，得 $f(a_{2n})>f(a_{2n+1})$，即 $a_{2n+1}>a_{2n+2}$．

所以 $a_{2n+1}>\sqrt{a_{2n+1}^2-2a_{2n+1}+2}-1$，解得 $a_{2n+1}>\frac{1}{4}$

所以 $a_{2n}<\frac{1}{4}<a_{2n+1}(n\in N^*)$ 成立.　　　　……10 分