江苏省仪征中学2020届高三上学期数学周末自助餐（5）

班级__________ 学号__________ 姓名__________ 成绩__________

一、填空题：

1. 函数 $y=\log_2(2x-4)+\dfrac{1}{x-3}$的定义域是__________.

2. 若 lg 2，$\lg(2^x+1)$，$\lg(2^x+5)$成等差数列，则 x 的值等于______.

3. 已知 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且 $f(x+2)=-f(x)$，当 $2\le x\le 3$ 时，$f(x)=x$，则 $f(105.5)=$________.

4.已知直线 $ax+by+c=0$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 相交于 A、B 两点，且$|AB|=\sqrt{3}$，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=$______.

5.设直线 $y=a$ 分别与曲线 $y^2=x$ 和 $y=e^x$ 交于点 M、N，则当线段 MN 取得最小值时 a 的值为_______.

6.已知在△ABC 中，内角 A，B，C 所对的边分别是 a，b，c，若 $\sin(B-A)+\sin(B+A)=3\sin 2A$，且 $c=\sqrt{7}$，$C=\dfrac{\pi}{3}$，则△ABC 的面积是___________.

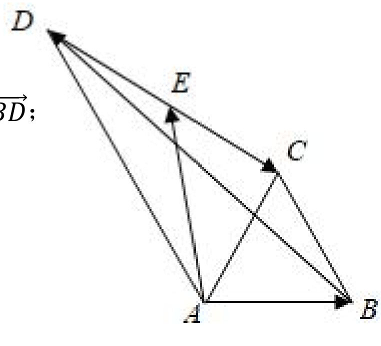
7. 若一个钝角三角形的三内角成等差数列，且最大边与最小边之比为 m，则实数 m 的取值范围是________.

8.周长是 $\sqrt{2}+1$ 的直角三角形的面积最大值为___________.

9.函数 $f(x)=\begin{cases}|x^2+2x-1|，x\leqslant 0，\\ 2^{x-1}+a，x>0，\end{cases}$ 有两个不同的零点，则实数 a 的取值范围为________.

10.已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-4,x\le 0\\ e^x-5,x>0\end{cases}$，若关于 x 的方程 $|f(x)|-ax-5=0$ 恰有三个不同的实数解，则满足条件的所有实数 a 的取值集合为________________.

二、解答题：



11.如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AD=4$，$AB=2$.

(1)若△ABC 为等边三角形，且 $AD\parallel BC$，E 是 CD 的中点，求$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}$；

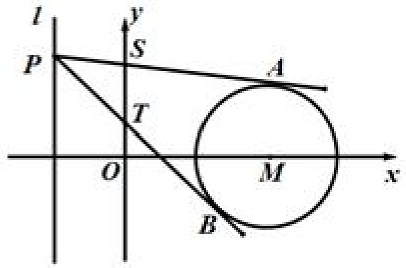
(2)若 $AC=AB$，$\cos\angle CAB=\frac{3}{5}$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\frac{4}{5}$，求$|\overrightarrow{DC}|$.

12.如图,圆 M：$(x-2)^2+y^2=1$,点 $P(-1,t)$为直线 l：$x=-1$ 上一动点,过点 P 引圆 M 的两条切线,切点分别为 A、B.

(1)若 $t=1$,求切线所在直线方程；

(2)求$|AB|$的最小值；

(3)若两条切线 PA,PB 与 y 轴分别交于 S、T 两点,求$|ST|$的最小值.



周末自助餐（5）参考答案：

一、填空题：

1.解析：由题意得$\begin{cases}2x-4>0,\\x-3\neq 0,\end{cases}$ 解得 $x>2$ 且 $x\neq 3$，所以函数 $y=\log_2(2x-4)+\dfrac{1}{x-3}$的定义域为$(2,3)\cup(3,+\infty)$.

2.解析：由题意知 $\lg 2+\lg(2^x+5)=2\lg(2^x+1)$，由对数的运算性质得 $2(2^x+5)=(2^x+1)^2$，即$(2^x)^2-9=0, 2^x=3$，$x=\log_2 3$.

3. 解析：由 $f(x+2)=-f(x)$，得 $f(x+4)=f[(x+2)+2]=-f(x+2)=-[-f(x)]=f(x)$，所以函数 $f(x)$的周期为 4，所以 $f(105.5)=f(4\times 27-2.5)=f(-2.5)=f(2.5)=2.5$.

4.解析：取 D 为 AB 的中点，因为 $OA=1$，$AB=\sqrt{3}$，所以$\angle AOD=\dfrac{\pi}{3}$. 所以$\angle AOB=\dfrac{2\pi}{3}$. 所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=1\times 1\times\cos\dfrac{2\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}$.

5.解析：由题意，$a>0$，$M(a^2,a)$，$N(\ln a,a)$，故 MN 的长 $l=|a^2-\ln a|$，设 $f(a)=a^2-\ln a(a>0)$，所以 $f'(a)=2a-\dfrac{1}{a}=\dfrac{2a^2-1}{a}=\dfrac{2\left(a+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(a-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{a}$，令 $f'(a)>0$，得 $f(a)=a^2-\ln a$ 在$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$上单调递增；令 $f'(a)<0$，得 $f(a)=a^2-\ln a$ 在$\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$上单调递减，所以当 $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时，$f(a)_{min}=f(\dfrac{\sqrt{2}}{2})=\dfrac{1}{2}-\ln\dfrac{\sqrt{2}}{2}>0$，所以 $l=|a^2-\ln a|=a^2-\ln a=f(a)$，所以当 $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时，线段 MN 的长取得极小值，也是最小值.

6.答案：$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$或$\dfrac{7\sqrt{3}}{6}$.解析：由 $\sin(B-A)+\sin(B+A)=3\sin 2A$，得 $2\sin B\cos A=6\sin A\cos A$，所以 $\cos A=0$ 或 $\sin B=3\sin A$.若 $\cos A=0$，则 $A=\dfrac{\pi}{2}$，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$C=\dfrac{\pi}{3}$，所以 $b=\dfrac{c}{\tan C}=\dfrac{\sqrt{21}}{3}$，此时$\triangle ABC$的面积 $S=\dfrac{1}{2}bc=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{21}}{3}\times\sqrt{7}=\dfrac{7\sqrt{3}}{6}$；若 $\sin B=3\sin A$，即 $b=3a$，由余弦定理得 $7=a^2+9a^2-2\cdot a\cdot 3a\cdot\dfrac{1}{2}$，得 $a=1$，所以 $b=3$，此时$\triangle ABC$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times 1\times 3\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

7.答案：$(2,+\infty)$.解析：由三角形的三个内角成等差数列，得中间角为 $60°$.设最小角为α，则最大角为 $120°-\alpha$，其中 $0°<\alpha<30°$.由正弦定理得 $m=\dfrac{\sin(120°-\alpha)}{\sin\alpha}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{\tan\alpha}+\dfrac{1}{2}>\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}=2$.

8.答案：$\dfrac{1}{4}$.解析：设直角三角形的两条直角边分别为 m，n，依题意有 $m+n+\sqrt{m^2+n^2}=\sqrt{2}+1$.

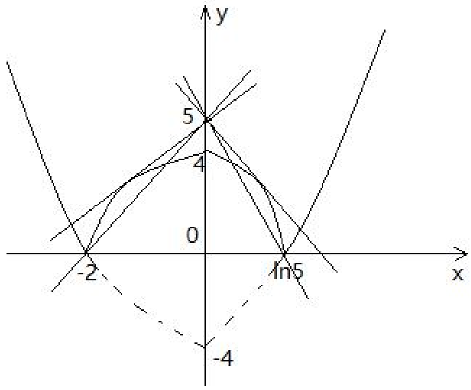
所以 $\sqrt{2}+1=m+n+\sqrt{m^2+n^2}\geq 2\sqrt{mn}+\sqrt{2mn}$，所以 $\sqrt{2}+1\geq(2+\sqrt{2})\sqrt{mn}$.

所以 $\sqrt{2}+1\geq(2+\sqrt{2})\sqrt{mn}$，即 $\sqrt{mn}\leq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，当且仅当 $m=n=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时“=”成立.

所以直角三角形的面积 $S=\dfrac{1}{2}mn\leq\dfrac{1}{4}$.

9. 解析：由于当 $x\leqslant 0$，$f(x)=|x^2+2x-1|$时图象与 x 轴只有 1 个交点，即只有 1 个零点，故由题意只需方程 $2^{x-1}+a=0$ 有 1 个正根即可，变形为 $2^x=-2a$，结合图形只需$-2a>1$，解得 $a<-\dfrac{1}{2}$.

10.答案：$\{2,\dfrac{5}{2},-\dfrac{5}{\ln 5},-e\}$



解析：方程 $|f(x)|-ax-5=0$ 恰有三个不同的实数解，即函数 $y=|f(x)|$ 与函数 $y=ax+5$ 的图象有三个交点，画出 $y=|f(x)|$ 的图象，注意到 $y=ax+5$ 恒过点(0,5)，所以当直线过点（-2,0）、过点（ln5,0）、与左右侧图象分别相切时，均符合题意，经计算得：$a=2,\dfrac{5}{2},-\dfrac{5}{\ln 5},-e$.

二、解答题：

11.解：(1)因为△ABC 为等边三角形,且 $AD\parallel BC$,

∴ $\angle DAB=120°$. 又 $AD=2AB$,∴$AD=2BC$,因为 E 是 CD 的中点,

∴$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}),=\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. 又$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$,

∴$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}=(\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB})(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}^2-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2-\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{3}{4}\cdot16-\frac{1}{2}\cdot4-\frac{1}{4}\cdot4\cdot2\cdot(-\frac{1}{2})=11$.

(2)因为 $AB=AC,AB=2$,∴$AC=2$. 因为$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\frac{4}{5}$,∴$\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\frac{4}{5}$.

∴$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{4}{5}$. 又$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AB}|\cos\angle CAB=4\cdot\frac{3}{5}=\frac{12}{5}$.

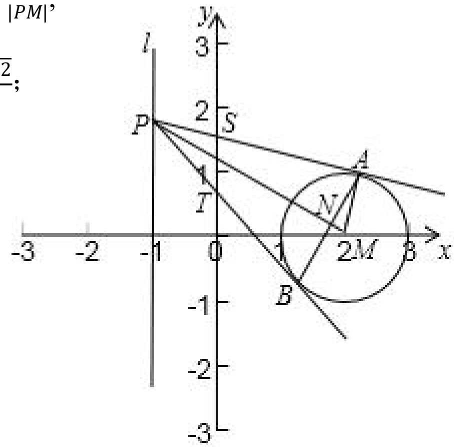
∴$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{4}{5}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{16}{5}$. ∴$|\overrightarrow{DC}|^2=|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}|^2=4+16-2\cdot\frac{16}{5}=\frac{68}{5}$. ∴$|\overrightarrow{DC}|=\frac{2\sqrt{85}}{5}$.

12.解：(1)由题意,切线斜率存在,可设切线方程为 $y-1=k(x+1)$,即 $kx-y+k+1=0$,

则圆心 M 到切线的距离 $d=\frac{|3k+1|}{\sqrt{k^2+1}}=1$,解得 $k=0$ 或$-\frac{3}{4}$,故所求切线方程为 $y=1,3x+4y-1=0$;

(2)连接 PM,AB 交于点 N,设$\angle MPA=\angle MAN=\theta$,

则$|AB|=2|AM|cos\theta=2cos\theta$,在 $Rt\triangle MAP$ 中,$sin\theta=\frac{|AM|}{|PM|}=\frac{1}{|PM|}$,



$\because |PM|\geq 3,\therefore (sin\theta)_{max}=\frac{1}{3},\therefore (cos\theta)_{min}=\frac{2\sqrt{2}}{3},\therefore |AB|_{min}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$;

(3)设切线方程为 $y-t=k(x+1)$,即 $kx-y+k+t=0$,

PA,PB 的斜率为k_1,k_2,

故圆心 M 到切线的距离 $d=\frac{|3k-t|}{\sqrt{k^2+1}}=1$,

得 $8k^2-6kt+t^2-1=0$,

$\therefore k_1+k_2=\frac{3}{4}t,k_1k_2=\frac{t^2-1}{8}$,

在切线方程中令 $x=0$ 可得 $y=k+t$,

故$|ST|=|(k_1+t)-(k_2+t)|=|k_1-k_2|=\sqrt{(k_1+k_2)^2-4k_1k_2}=\frac{\sqrt{t^2+8}}{4}$,

$\therefore |ST|_{min}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,此时 $t=0$. 故$|ST|$的最小值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.