江苏省仪征中学 2018-2019 学年第一学期高三数学

周三练习（10） 2018. 11. 21

范围：集合与逻辑、函数与导数、三角函数、平面向量、直线与圆 、圆锥曲线、不等式、数列

一. 填空题：本大题共 14 小题，每小题 5 分，计 70 分. 不需写出解答过程，请把答案写在答题纸的指定位置上.

1. 已知集合 $A=\{1,2,3\},B=\{2,4,5\}$，则集合 $A\cup B$ 中元素的个数为_________.

2. 设 $\frac{1+i}{1-i}=a+bi(i$ 为虚数单位，$a,b\in R)$，则 ab 的值为_________.

3. 函数 $f\left(x\right)=\frac{1}{\ln(4x-3)}$ 的定义域为_________.

4. 若抛物线 $y^2=8x$ 的焦点恰好是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{3}=1(a>0)$ 的右焦点，则双曲线的右准线方程为______.

5. 若实数 x,y 满足 $\begin{cases}x+y-1\ge 0\\ y-x-1\le 0\\ x\le 1\end{cases}$，则 $z=2x+3y$ 的最大值为______.

6. 已知 $f\left(x\right)$ 是定义在 R 上的奇函数，当 $x>0$ 时，$f\left(x\right)=x^2-4x$，则不等式 $f\left(x\right)>x$ 的解集为______.

7. 圆心在直线 $y=-4x$ 上，且与直线 $l:x+y-1=0$ 相切于点 $P\left(3,-2\right)$ 的圆的方程为______.

8. 数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，且 a_1+1，a_3+4，a_5+7 成等差数列，则公差 d 等于______.

9. 将函数 $f\left(x\right)=\sin x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位后得到函数 $g\left(x\right)$ 的图象，则函数 $f\left(x\right)+g\left(x\right)$ 的最大值为______.

10. 已知椭圆 $C_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 与圆 $C_2:x^2+y^2=b^2$，若椭圆 C_1 上存在点 P，由点 P 向圆 C_2 所作的两条切线 PA，PB，且 $\angle APB=60^\circ$，则椭圆 C_1 的离心率的取值范围是_________.

11. 已知 ΔABC 是边长为 3 的等边三角形，点 P 是以 A 为圆心的单位圆上一动点，点 Q 满足 $\overrightarrow{AQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AP}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，则 $\left|\overrightarrow{BQ}\right|$ 的最小值是_________.

12. 若实数 x,y 满足 $xy+3x=3(0<x<\frac{1}{2})$，则 $\frac{3}{x}+\frac{1}{y-3}$ 的最小值为_________.

13. 已知函数 $f\left(x\right)=x^2+\left(1-a\right)x-a$，若关于 x 的不等式 $f\left(f\left(x\right)\right)<0$ 的解集为空集，则实数 a 的取值范围是______.

14. 若函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{x}}-1,x<1\\ \dfrac{\ln x}{x^{2}},x\geq 1\end{cases}$，则函数 $y=\left|f\left(x\right)\right|-\dfrac{1}{8}$ 的零点个数为__________.

二. 解答题：本大题共 6 小题，计 90 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤，请把答案写在答题纸的指定区域内.

15. 已知函数 $f\left(x\right)=\sqrt{3}\sin\omega x-\cos\omega x(\omega>0)$ 的图象与直线 $y=2$ 的相邻两个交点之间的距离为 π 。

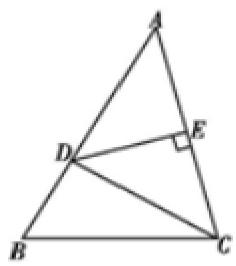
（1）求函数 $f\left(x\right)$ 的单调递增区间；

（2）若 $f\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=\dfrac{2}{3}$，求 $\cos\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的值。

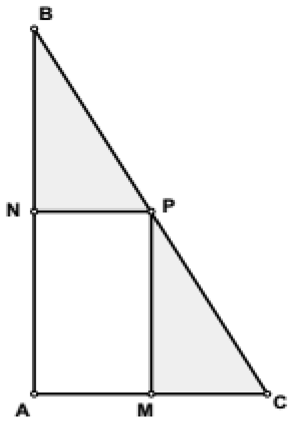
16. 如图，在 $\Delta ABC, B=\dfrac{\pi}{3}, BC=2,$ 点 D 在边 AB 上 $AD=DC, DE\perp AC$，E 为垂足.

（1）若 ΔBCD 的面积为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，求 CD 的长

（2）若 $ED=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，求角 A 的大小



17. 我校为丰富师生课余活动，计划在一块直角三角形 ABC 的空地上修建一个占地面积为 S（平方米）的 $AMPN$ 矩形健身场地，如图，点 M 在 AC 上，点 N 在 AB 上，且 P 点在斜边 BC 上，已知 $\angle ACB=60^\circ$，$\left|AC\right|=30$ 米，$\left|AM\right|=x$ 米，$x\in\left[10,20\right]$. 设矩形 $AMPN$ 健身场地每平方米的造价为 $\dfrac{37k}{\sqrt{S}}$ 元，再把矩形 $AMPN$ 以外（阴影部分）铺上草坪，每平方米的造价为 $\dfrac{12k}{\sqrt{S}}$ 元（k 为正常数）



（1）试用 x 表示 S，并求 S 的取值范围；

（2）求总造价 T 关于面积 S 的函数 $T=f\left(S\right)$；

（3）如何选取 $\left|AM\right|$，使总造价 T 最低（不要求求出最低造价）

18. 给定椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$，称圆 $C_1:x^2+y^2=a^2+b^2$ 为椭圆 C 的“伴随圆”. 已知点 $A\left(2,1\right)$ 是椭圆 $G:x^2+4y^2=m$ 上的点

（1）若过点 $P\left(0,\sqrt{10}\right)$ 的直线 l 与椭圆 G 有且只有一个公共点，求 l 被椭圆 G 的伴随圆 G_1 所截得的弦长：

（2）B,C 是椭圆 G 上的两点，设 k_1,k_2 是直线 AB,AC 的斜率，且满足 $4k_1\cdot k_2=-1$，试问：直线 B,C 是否过定点，如果过定点，求出定点坐标，如果不过定点，试说明理由。

19. 已经函数 $f\left(x\right)=\left(x^2-3x+3\right)e^x$ 的定义域为 $\left[-2,t\right]$，

（1）试确定 t 的取值范围，使得函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left[-2,t\right]$ 上为单调函数

（2）若不等式 $\dfrac{f\left(x\right)}{e^x}+7x-2>k\left(x\ln x-1\right)$（为 k 正整数）对任意正实数 x 恒成立，求 k 的最大值.（解答过程可参考使用以下数据 $\ln 7\approx 1.95,\ln 8\approx 2.08$）

20. 已知函数 $f(x)=ax+\dfrac{a-2}{x}+2-2a\ (a>0)$.

（1）当 $a=1$ 时，求函数 $f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线方程；

（2）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（3）若 $f(x)\geqslant 2\ln x$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立，求 a 的取值范围.

周三练习（10）参考答案

一、填空题

1. 5　　2. 0　　3. $\left\{x \middle| x>\frac{3}{4}\text{且}x\neq 1\right\}$　　4. $x=\frac{1}{2}$　　5. 8

6. $(-5,0)\cup(5,+\infty)$　　7. $(x-1)^2+(y+4)^2=8$　　8. 3　　9. $\sqrt{3}$

10. $\left[\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$　　11. $\frac{3\sqrt{7}-2}{3}$　　12. 8　　13. $-3\le a\le 2\sqrt{2}-3$　　14. 4

二、解答题

15. （1）因为 $f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x-\cos\omega x(\omega>0)$，所以 $f(x)=2\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)$，

所以 $f(x)_{\max}=2$，因为函数 $f(x)$ 与直线 $y=2$ 的相邻两个交点之间的距离为 π，所以 $T=\pi$，

所以 $\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，解得 $\omega=\pi$，　　所以 $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，

令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\le 2x-\frac{\pi}{6}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z$，解得 $k\pi-\frac{\pi}{6}\le x\le k\pi+\frac{\pi}{3},k\in Z$，

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $\left[k\pi-\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{\pi}{3}\right],k\in Z$

（2）由（1）知，$f\left(\frac{\alpha}{2}\right)=2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$，

因为 $f\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{2}{3}$，所以 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{3}$，所以 $\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\cos 2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=1-2\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{7}{9}$

16. 解：（1）由已知得 $S_{\Delta BCD}=\frac{1}{2}BC\cdot BD\cdot\sin B=\frac{\sqrt{3}}{3}$，又 $B=\frac{\pi}{3}\therefore BD=\frac{2}{3}$

在 ΔBCD 中，由余弦定理得 $CD^2=BC^2+BD^2-2BC\cdot BD\cdot\cos B=\frac{28}{9}\cdot\therefore CD=\frac{2\sqrt{7}}{3}$

（2）在 ΔCDE 中 $\frac{CD}{\sin\angle DEC}=\frac{DE}{\sin\angle DCE},\because AD=DC,\therefore A=\angle DCE$

$\therefore CD=AD=\frac{DE}{\sin A}=\frac{\sqrt{6}}{2\sin A}$，

在 ΔBCD 中 $\frac{BC}{\sin\angle BDC}=\frac{CD}{\sin B}$，又 $\angle BDC=2A$，得

$\frac{2}{\sin 2A}=\frac{CD}{\sin\frac{\pi}{3}},\therefore CD=\frac{\sqrt{3}}{\sin 2A}\therefore CD=\frac{\sqrt{6}}{2\sin A}=\frac{\sqrt{3}}{\sin 2A}$ 解得 $\cos A=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $A=\frac{\pi}{4}$

17．解:（1）在 $Rt\Delta PMC$ 中，显然 $\left|MC\right|=30-x,\angle PCM=60^\circ$，

$\left|PM\right|=\left|MC\right|\cdot\tan\angle PCM=\sqrt{3}\left(30-x\right)$，

矩形 $AMPN$ 的面积 $S=\left|PM\right|\cdot\left|MC\right|=\sqrt{3}x\left(30-x\right),x\in\left[10,20\right]$

于是 $200\sqrt{3}\le S\le 225\sqrt{3}$ 为所求

（2）矩形 $AMPN$ 健身场地造价 $T_1=37k\sqrt{S}$

又 ΔABC 的面积为 $450\sqrt{3}$，即草坪造价 $T_2=\dfrac{12k}{\sqrt{S}}\left(450\sqrt{3}-S\right)$，

由总造价 $T=T_1+T_2,\therefore T=25k\left(\sqrt{S}+\dfrac{216\sqrt{3}}{S}\right),200\sqrt{3}\le S\le 225\sqrt{3}$

(3) $\because\sqrt{S}+\dfrac{216\sqrt{3}}{\sqrt{S}}\ge 12\sqrt{6\sqrt{3}}$

当且仅当 $\sqrt{S}=\dfrac{216\sqrt{3}}{\sqrt{S}}$ 即 $S=216\sqrt{3}$ 时等号成立，此时，$\sqrt{3}x\left(30-x\right)=216\sqrt{3}$ 解得 $x=12$ 或 $x=18$

答：选取 $\left|AM\right|$ 的长为 12 米或 18 米时总造价 T 最低.

18. 解：（1）因为点 $A\left(2,1\right)$ 是椭圆 $G:x^2+4y^2=m$ 上的点.

$\therefore 2^2+4\cdot 1^2=m,\therefore m=8$ 即椭圆 $G:\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$

$\therefore a^2=8,b^2=2,\therefore$ 伴随圆 $G_1:x^2+y^2=10$

当直线 l 的斜率不存在时：显然不满足 l 与椭圆 G 有且只有一个公共点

当直接 l 的斜率存在时：设直线 $l:y=kx+\sqrt{10}$ 与椭圆 $G:x^2+4y^2=8$ 联立得 $\left(1+4k^2\right)x^2+8\sqrt{10}kx+32=0$

由直线 l 与椭圆 G 有且只有一个公共点得 $\Delta=\left(8\sqrt{10}K\right)^2-4\cdot\left(1+4K^2\right)\cdot 32=0$

解得 $k=\pm1$，由对称性取直线 $l:y=x+\sqrt{10}$ 即 $l:x-y+\sqrt{10}=0$

圆心到直线 l 的距离为 $d=\dfrac{\left|0+0+\sqrt{10}\right|}{\sqrt{1+1}}=\sqrt{5}$

直线 l 被椭圆 G 的伴随圆 G_1 所截得的弦长 $=2\sqrt{10-5}=2\sqrt{5}$

（2）设直线 AB,AC 的方程分别为 $y-1=k_1\left(x-2\right),y-1=k_2\left(x-2\right)$

设点$B\left(x_1,y_1\right),C\left(x_2,y_2\right)$

联立$G:x^2+4y^2=8$得$\left(1+4k_1^2\right)x^2-(16k_1^2-8k_1)x+16k_1^2-16k_1-4=0$

则$2x_1=\dfrac{16k_1^2-16k_1-4}{1+4k_1^2}$得$x_1=\dfrac{8k_1^2-8k_1-2}{1+4k_1^2}$同理$x_2=\dfrac{8k_2^2-8k_2-2}{1+4k_2^2}$

斜率$k_{OB}=\dfrac{y_1}{x_1}=\dfrac{k_1(x_1-2)+1}{x_1}=\dfrac{-4k_1^2-4k_1+1}{8k_1^2-8k_1-2}$

同理$k_{OC}=\dfrac{-4k_2^2-4k_2+1}{8k_2^2-8k_2-2}$因为$4k_1\cdot k_2=-1$

所以$k_{OC}=\dfrac{-4(\frac{-1}{4k_1})^2-4(\frac{-1}{4k_1})+1}{8(\frac{-1}{4k_1})^2-8(\frac{-1}{4k_1})-2}=\dfrac{-1+4k_1+4k_1^2}{2+8k_1-8k_1^2}=k_{OB}$　　$\therefore B,O,C$三点共线

19. 解：（1）因为$f'\left(x\right)=(x^2-3x+3)\cdot e^x=x(x-1)\cdot e^x$

令$f'\left(x\right)>0,$得$:x>1$或$x<0$；令$f'\left(x\right)<0$，得$:0<x<1$

所以$f\left(x\right)$在$\left(-\infty,0\right),(1,+\infty)$上递增，在$(0,1)$上递减

要使$f\left(x\right)$在$\left[-2,t\right]$为单调函数，则$-2<t\leq 0$,　所以t的取值范围为$\left(-2,0\right]$

（2）$\dfrac{f\left(x\right)}{e^x}+7x-2>k\left(x\ln x-1\right)$等价于$x^2+4x+1>k\left(x\ln x-1\right)$

即$x+\dfrac{k+1}{x}+4-k\ln x>0$

记$g\left(x\right)=x+\dfrac{k+1}{x}+4-k\ln x$，则$g'\left(x\right)=1-\dfrac{k+1}{x^2}-\dfrac{k}{x}=\dfrac{(x+1)(x-k-1)}{x^2}$

由$g'\left(x\right)=0$　得$x=k+1$，

所以$g\left(x\right)$在$(0,k+1)$上单调递减，在$(k+1,+\infty)$上单调递增

所以$g(x)\geq g(k+1)=k+6-k\ln(k+1)$

$g\left(x\right)>0$对任意正实数x恒成立，　等价于$k+6-k\ln(k+1)>0$，即$1+\dfrac{6}{k}-\ln(k+1)>0$

记$h\left(x\right)=1+\dfrac{6}{k}-\ln(k+1)$，则$h'\left(x\right)=-\dfrac{6}{x^2}-\dfrac{1}{x+1}<0$

所以$h\left(x\right)$在$(0,+\infty)$上单调递减，

又 $h(6)=2-\ln 7>0, h(7)=\dfrac{13}{7}-\ln 8<0,$ 所以 k 的最大值为 6

20.解: (1)当 $a=1$ 时，$f(x)=x-\dfrac{1}{x}$，$f'(x)=1+\dfrac{1}{x^2}$ **…………**2 分

$f(2)=\dfrac{3}{2}$，$f'(2)=\dfrac{5}{4}$ 所以，函数 $f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线方程为 $y-\dfrac{3}{2}=\dfrac{5}{4}(x-2)$

即：$5x-4y-4=0$ …………4 分

（2）函数的定义域为：$\{x\,|\,x\neq 0\}$

$f^{'}(x)=a-\dfrac{a-2}{x^2}=\dfrac{ax^2+(2-a)}{x^2}(a>0)$ …………6 分

当 $0<a\le 2$ 时，$f^{'}(x)\ge 0$ 恒成立，所以，$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上单调递增

当 $a>2$ 时，令 $f^{'}(x)=0$，即：$ax^2+2-a=0$，$x_1=-\sqrt{\dfrac{a-2}{a}}, x_2=\sqrt{\dfrac{a-2}{a}}$

$f^{'}(x)>0,\ x>x_2$或$x<x_1$；$f^{'}(x)<0,\ x_1<x<0$或$0<x<x_2$，

所以，$f(x)$ 单调递增区间为 $(-\infty,-\sqrt{\dfrac{a-2}{a}})$和$(\sqrt{\dfrac{a-2}{a}},+\infty)$，

单调减区间为 $(-\sqrt{\dfrac{a-2}{a}},0)$和$(0,\sqrt{\dfrac{a-2}{a}})$． ……10 分

（3）因为 $f(x)\ge 2\ln x$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立，有 $ax+\dfrac{a-2}{x}+2-2a-2\ln x\ge 0(a>0)$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立.

所以，令 $g(x)=ax+\dfrac{a-2}{x}+2-2a-2\ln x$，

则 $g^{'}(x)=a-\dfrac{a-2}{x^2}-\dfrac{2}{x}=\dfrac{ax^2-2x-a+2}{x^2}=\dfrac{(x-1)[ax+(a-2)]}{x^2}$．

令 $g^{'}(x)=0,$ 则 $x_1=1, x_2=-\dfrac{a-2}{a}$

若 $-\dfrac{a-2}{a}=1$，即 $a=1$ 时，$g^{'}(x)\ge 0$，函数 $g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，又 $g(1)=0$

所以，$f(x)\ge 2\ln x$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立；

若 $-\dfrac{a-2}{a}>1$，即 $a<1$ 时，当 $x\in(0,1),(-\dfrac{a-2}{a},+\infty)$ 时，$g^{'}(x)>0, g(x)$ 单调递增；

当 $x\in(1,-\dfrac{a-2}{a})$ 时，$g^{'}(x)<0$，$g(x)$ 单调递减

所以，$g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上的最小值为 $g(-\dfrac{a-2}{a})$，因为 $g(1)=0,$ 所以 $g(-\dfrac{a-2}{a})<0$ 不合题意.

若 $-\dfrac{a-2}{a}<1,$ 即 $a>1$ 时，当 $x\in(0,-\dfrac{a-2}{a}),(1,+\infty)$ 时，$g^{'}(x)>0, g(x)$ 单调递增，

当 $x\in(-\dfrac{a-2}{a},1)$ 时，$g^{'}(x)<0, g(x)$ 单调递减，所以，$g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上的最小值为 $g(1)$

又因为 $g(1)=0$，所以 $f(x)\ge 2\ln x$ 恒成立

综上知，a 的取值范围是 $[1,+\infty)$． …………16 分