

高三数学基础强化滚动训练(二)

(满分 100 分 时间 60 分钟)

一、单项选择题(每小题 5 分, 共 25 分)

1. 已知全集 $U=\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, 集合 $A=\{4, 5, 7\}$, $B=\{4, 6\}$, 则 $A \cap (\complement_U B) = (\quad)$
A. $\{5\}$ B. $\{2\}$ C. $\{2, 5\}$ D. $\{5, 7\}$
2. 在 $\triangle ABC$ 中, “ $A+B=\frac{\pi}{2}$ ”是“ $\sin A = \cos B$ ”的()
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
3. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(-1)=2$, 对任意 $x \in \mathbf{R}$, $f(x) > 2$, 则 $f(x) > 2x+4$ 的解集为()
A. $(-1, 1)$ B. $(-1, +\infty)$ C. $(-\infty, -1)$ D. $(-\infty, +\infty)$
4. 若 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$, $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{3}$, $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 则 $\cos\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) = (\quad)$
A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{5\sqrt{3}}{9}$ D. $-\frac{\sqrt{6}}{9}$
5. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0, \\ \ln x, & x > 0, \end{cases}$ $g(x) = f(x) + x + a$. 若 $g(x)$ 存在 2 个零点, 则 a 的取值范围是()
A. $[-1, 0)$ B. $[0, +\infty)$ C. $[-1, +\infty)$ D. $[1, +\infty)$

二、多项选择题(每小题 5 分, 共 10 分)

6. 已知函数 $f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$, 则下列说法正确的是()
A. 函数 $f(x)$ 的图像关于点 $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ 对称 B. 函数 $f(x)$ 图像的一条对称轴是 $x = -\frac{\pi}{12}$
C. 若 $x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$, 则函数 $f(x)$ 的最小值为 $\sqrt{3} + 1$ D. 若 $0 < x_1 < x_2 < \pi$, 则 $f(x_1) < f(x_2)$
7. 已知向量 $\mathbf{m} = (\sin x, -\sqrt{3})$, $\mathbf{n} = (\cos x, \cos^2 x)$, 函数 $f(x) = \mathbf{m} \cdot \mathbf{n} + \frac{\sqrt{3}}{2}$, 下列命题正确的是()
A. $y = f(x)$ 的最小正周期为 π B. $y = f(x)$ 的图像关于点 $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$ 对称
C. $y = f(x)$ 的图像关于直线 $x = \frac{\pi}{12}$ 对称 D. $y = f(x)$ 的单调增区间为 $\left[2k\pi - \frac{\pi}{12}, 2k\pi + \frac{5\pi}{12}\right] (k \in \mathbf{Z})$

三、填空题(每小题 5 分, 共 15 分)

8. 已知函数 $y = \cos x$ 与函数 $y = \sin(2x + \varphi) (0 \leq \varphi < \pi)$, 它们的图像有一个横坐标为 $\frac{\pi}{3}$ 的交点, 则 φ 的值是_____.
9. (2020 浙江宁波高一期中) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{1-x}$, 把 $f(x)$ 的图像向右平移一个单位长度, 再向上平移一个单位长度, 得到 $y = g(x)$ 的图像, 则 $g(x)$ 的解析式为_____; $y = |g(x)|$ 的递减区间为_____.
10. 将函数 $f(x) = 2\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right) (\omega > 0)$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{4\omega}$ 个单位长度, 得到函数 $y = g(x)$ 的图像, 若 $y = g(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ 上是增函数, 则 ω 的最大值为_____.

四、解答题(每小题 25 分, 共 50 分)

11. 已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-2\sin x\cos x$.

(1) $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 求证: 当 $x\in\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ 时, $f(x)\geq-\frac{1}{2}$.

12. 已知函数 $f(x)=x^3+3ax^2+3x+1$.

(1) 求 $a=-\sqrt{2}$ 时, 试讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $x\in[2, +\infty)$ 时, $f(x)\geq 0$, 求实数 a 的取值范围.

高三数学基础强化滚动训练(二)答案与解析

1. D 解析: 由题意知 $\complement_U B = \{2, 3, 5, 7\}$, 所以 $A \cap (\complement_U B) = \{4, 5, 7\} \cap \{2, 3, 5, 7\} = \{5, 7\}$, 故选 D.

2. A 解析: 若 $A+B=\frac{\pi}{2}$, 则 $\sin A = \sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right) = \cos B$; 若 $\sin A = \cos B$, 则 $\sin A = \sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)$,

因为 A, B 为三角形的内角, 所以 $A = \frac{\pi}{2} - B$ 或 $A + \frac{\pi}{2} - B = \pi$,

即 $A+B=\frac{\pi}{2}$ 或 $A-B=\frac{\pi}{2}$. 故选 A.

3. B 解析: 依题意可设 $g(x) = f(x) - 2x - 4$, 所以 $g'(x) = f'(x) - 2 > 0$.

所以函数 $y = g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. 又因为 $g(-1) = f(-1) + 2 - 4 = 0$,

所以要使 $g(x) = f(x) - 2x - 4 > 0$, 即 $g(x) > g(-1)$, 只需要 $x > -1$, 故选 B.

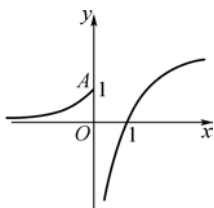
4. C 解析: 因为 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\frac{\pi}{4} < \alpha + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4}$, 则 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

因为 $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$, 则 $\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2} < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)} = \frac{\sqrt{6}}{3}$,

$$\begin{aligned} \text{因此 } \cos\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) &= \cos\left[\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)\right] \\ &= \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right) + \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{9}. \end{aligned}$$

5. C 解析: 画出函数 $f(x)$ 的图像, $y = e^x$ 在 y 轴右侧的去掉,

再画出直线 $y = -x$ 之后上下移动,



可以发现当直线过点 A 时, 直线与函数图像有 2 个交点,

并且向下可以无限移动, 都可以保证直线与函数的图像有 2 个交点,

即方程 $f(x) = -x - a$ 有 2 个解, 也就是函数 $g(x)$ 有 2 个零点,

此时满足 $-a \leq 1$, 即 $a \geq -1$, 故选 C.

6. BC 解析: A, 令 $2x - \frac{\pi}{3} = k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 知关于点 $\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, 1\right) (k \in \mathbf{Z})$ 对称, 所以 A 不成立;

B, 令 $2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 知关于 $x = \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ 轴对称, 所以 B 成立;

C, 若 $x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $2x - \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$, 则函数 $f(x)$ 的最小值为 $\sqrt{3} + 1$, C 成立;

D, 由于当 $0 < x_1 < x_2 < \pi$, $f(x)$ 不单调, 所以不成立.

故选 BC.

7. AB 解析: $f(x) = m \cdot n + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin x \cos x - \sqrt{3} \cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$, 其最

小正周期是 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$, A 正确;

又 $\sin\left(2 \times \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right) = 0$, 因此 $f(x)$ 图像关于点 $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$ 对称, B 正确;

令 $2x - \frac{\pi}{3} = k\pi + \frac{\pi}{2}$ 得 $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{5\pi}{12} (k \in \mathbf{Z})$, 因此 $x = -\frac{\pi}{12}$ 是 $f(x)$ 图像的一条对称轴, C 错误;

由 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, 得 $k\pi - \frac{\pi}{12} \leq x \leq k\pi + \frac{5\pi}{12}$, 即增区间为 $\left[k\pi - \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{5\pi}{12}\right]$, $k \in \mathbf{Z}$,

D 错误. 故选 AB.

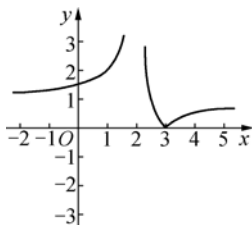
8. $\frac{\pi}{6}$ 解析: 由题意 $\cos \frac{\pi}{3} = \sin\left(2 \times \frac{\pi}{3} + \varphi\right)$, 即 $\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \varphi\right) = \frac{1}{2}$, $\frac{2\pi}{3} + \varphi = k\pi + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} (k \in \mathbf{Z})$, 因

为 $0 \leq \varphi < \pi$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

9. $g(x) = \frac{1}{2-x} + 1$ (2,3) 解析: 因为函数 $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $f(x)$ 的图像向右平移一个单位长度, 得

到 $y = \frac{1}{1-(x-1)} = \frac{1}{2-x}$ 的图像, 再向上平移一个单位长度, 得到 $y = g(x) = \frac{1}{2-x} + 1$ 的图像; 所以

函数 $y = g(x) = \frac{1}{2-x} + 1$, 画出函数 $y = |g(x)|$ 的图像如图, 则 $y = |g(x)|$ 的递减区间为 (2,3).



10. $\frac{3}{2}$ 解析: 将函数 $f(x) = 2\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right) (\omega > 0)$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{4\omega}$ 个单位长度, 得到函数 $y = g(x)$

的图像, 则 $g(x) = 2\sin\left[\omega\left(x - \frac{\pi}{4\omega}\right) + \frac{\pi}{4}\right] = 2\sin \omega x$.

若 $y=g(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ 上为增函数, 则 $\begin{cases} -\frac{\pi}{6}\omega \geq -\frac{\pi}{2}, \\ \frac{\pi}{3}\omega \leq \frac{\pi}{2}, \end{cases}$ 解得 $0 < \omega \leq \frac{3}{2}$. 故 ω 的最大值为 $\frac{3}{2}$.

11. 解析: (1) $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x + \frac{3}{2}\sin 2x - \sin 2x = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$,

所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

(2) 因为 $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, 所以 $-\frac{\pi}{6} \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{5\pi}{6}$, 所以 $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \geq \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.

所以当 $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ 时, $f(x) \geq -\frac{1}{2}$.

12. 解析: (1) 当 $a = -\sqrt{2}$ 时, $f(x) = x^3 - 3\sqrt{2}x^2 + 3x + 1$, $f'(x) = 3x^2 - 6\sqrt{2}x + 3$.

令 $f'(x) = 0$, 得, $x_1 = \sqrt{2} - 1$, $x_2 = \sqrt{2} + 1$.

当 $x \in (-\infty, \sqrt{2} - 1)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(-\infty, \sqrt{2} - 1)$ 上是增函数;

当 $x \in (\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + 1)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + 1)$ 上是减函数;

当 $x \in (\sqrt{2} + 1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(\sqrt{2} + 1, +\infty)$ 上是增函数.

(2) 由 $f(2) \geq 0$ 得, $a \geq -\frac{5}{4}$. 当 $a \geq -\frac{5}{4}$, $x \in [2, +\infty)$ 时,

$$f'(x) = 3(x^2 + 2ax + 1) \geq 3\left(x^2 - \frac{5}{2}x + 1\right) = 3\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 2) > 0,$$

所以 $f(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 上是增函数, 于是当 $x \in [2, +\infty)$ 时, $f(x) \geq f(2) \geq 0$.

综上, a 的取值范围是 $\left[-\frac{5}{4}, +\infty\right)$.