研题　说题　促年轻教师专业成长

浙江省德清县高级中学　（313200）　施利强　江战明

笔者有幸参加了 2020 年浙江省湖州市的说题比赛,作为参赛的年轻教师切身体会到了青年教师说题的价值和意义.本文以这次赛题为例,通过对比各位参赛老师的说题过程,总结了说题的每个环节应该注意的地方,整理反思,让自己在比赛中得到锻炼和成长.

题目　已知椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$,$F_2(1,0)$是右焦点,$P$ 是椭圆 C 外一点,过点 P 作椭圆 C 的切线,切点是 Q,若 $PF_2\perp QF_2$ 时,求点 P 的轨迹方程,并求 OP 的最小值.

问题 1　解法突破太单一

教师说题时最基本的要求是将题目解出并给出多种解答,由于本题难度并不大,大部分参赛老师给出的解答过于单一.笔者以三个角度出发,给出了三种解答,现呈现如下.

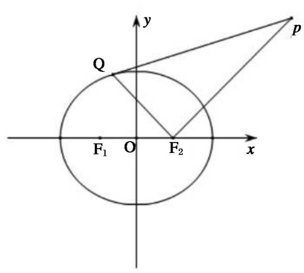

图 1

解析 1:如图 1,设 $Q(x_0,y_0)$,$P(x_1,y_1)$,则切线 $l:\frac{x_0x}{4}+\frac{y_0y}{3}=1$,$k_{QF_2}=\frac{y_0}{x_0-1}$,由于 $PF_2\perp QF_2$,则 $k_{PF_2}=\frac{1-x_0}{y_0}$.($y_0\neq0$,若 $y_0=0$,则 Q 为椭圆的右顶点,此时 $QF_2\perp QP$,不合题意),此时 $l_{PF_2}:y=\frac{1-x_0}{y_0}(x-1)$,联立切线 l 和直线 l_{PF_2}:$\begin{cases}\frac{x_0x}{4}+\frac{y_0y}{3}=1,\\ y=\frac{1-x_0}{y_0}(x-1),\end{cases}$ 解得 $x_1=4$,$y_1=\frac{3(1-x_0)}{y_0}$.即 P 点的轨迹为直线 $x=4$,而且 $|OP|_{\min}=4$,当 $P(4,0)$时取到.

解析 2:设 $Q(2\cos\theta,\sqrt{3}\sin\theta)$,$P(x_1,y_1)$,则切线 $l:\frac{2\cos\theta}{4x}+\frac{\sqrt{3}\sin\theta}{3y}=1$,$k_{QF_2}=\frac{\sqrt{3}\sin\theta}{2\cos\theta-1}$,由于 $PF_2\perp QF_2$,则 $k_{PF_2}=\frac{1-2\cos\theta}{\sqrt{3}\sin\theta}$.($\sin\theta\neq0$,若 $\sin\theta=0$,则 Q 为椭圆的右顶点,此时 $QF_2\perp QP$,不合题意).此时 $l_{PF_2}:y=\frac{1-2\cos\theta}{\sqrt{3}\sin\theta}(x-1)$,联立切线 l 和直线 l_{PF_2}:则 $\begin{cases}\frac{2\cos\theta}{4x}+\frac{\sqrt{3}\sin\theta}{3y}=1,\\ y=\frac{1-2\cos\theta}{\sqrt{3}\sin\theta}(x-1),\end{cases}$ 解得 $x_1=4$,$y_1=\frac{3(1-2\cos\theta)}{\sqrt{3}\sin\theta}$.即 P 点的轨迹为直线 $x=4$.而且 $|OP|_{\min}=4$,当 $P(4,0)$时取到.

解析 3:设 $Q(x_0,y_0)$,$P(x_1,y_1)$,则切线 $l:\frac{x_0x}{4}+\frac{y_oy}{3}=1$,由于 P 在直线 l 上,则$\frac{x_0x_1}{4}+\frac{y_oy_1}{3}=1$.因为 $PF_2\perp QF_2$,$\overrightarrow{PF_2}=(1-x_0,-y_0)$,$\overrightarrow{QF_2}=(1-x_1,-y_1)$,$\overrightarrow{PF_2}\cdot\overrightarrow{QF_2}=(1-x_1)(1-x_0)+y_1y_0=0$,结合$\frac{x_0x_1}{4}+\frac{y_oy_1}{3}=1$,消去 y_1y_0 可得$\frac{1}{4}x_0x_1-(x_1+x_0)+4=0$,即$(x_1-4)(x_0-4)=0$,由于 $-2\leqslant x_0\leqslant2$,则 $x_1=4$为定值,即 P 点的轨迹为直线 $x=4$.从而 $|OP|_{\min}=4$,当 $P(4,0)$时取到.

评注:说解法是说题的最基本也是最核心环节,如果解法突破太单一,教师解题能力将不是加分项,所以一般都会给出多种解答.但由于说题比赛的时间限制,说解法时可以强调解题思路,突出解法的核心步骤,而且核心步骤的给出是决定说题过程成功与否的关键.

问题 2　背景挖掘不深刻

说题目背景,我们不能只是停留在题目的表面,而应该更深刻地挖掘题目的背景甚至猜想命题者的命制过程和意图.笔者听完了其他参赛老师的说背景环节,部分老师对本题的背景挖掘如下.

如图 2,延长 QF_2 交椭圆于点 T,过点 T 作椭圆的切线 TG 交 PF_2 所在的直线于点 G.设 $T(x_2,y_2)$,$G(x_3,y_3)$,则 l_{TG}:$\frac{x_2x}{4}+\frac{y_2y}{4}=1$,由前面的做法可知 $x_3=4$,即 P、G 交于同一点,P 是准线 $x=4$ 的动点.

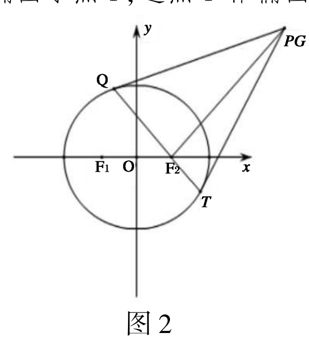

图 2

此时,结论可以统一为:已知椭圆 $C_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,$QT$ 为过 C_1 右焦点

F_2 的焦点弦,分别过 Q、T 作切线 l_1,l_2,则切线 l_1,l_2 的交点 P 落在定直线 $x=\frac{a^2}{c}$ 上,且 $PF_2\perp QT$.

解析:设 $P(x_0,y_0)$,则 $l_{QT}:\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$,由于 l_{QT} 过右焦点 $F_2(c,0)$,则 $x_0=\frac{a^2}{c}$,即 $P(\frac{a^2}{c},y_0)$ 落在定直线即椭圆的准线上. 另一方面 $k_{QT}=-\frac{x_0}{y_0}\frac{b^2}{a^2}=-\frac{b^2}{c}.\frac{1}{y_0}$,$k_{PF_2}=\frac{y_0}{\frac{a^2}{c}-c}=\frac{c}{b^2}y_0$,所以 $k_{QT}\cdot k_{PF_2}=-1$,即有 $PF_2\perp QT$ 成立.

参赛的老师当中,也有将本题的背景极点极线介绍出来的. 笔者说题时也用了两分钟的时间简单介绍了极点极线的基本理论及本题与该理论相关的结论. 笔者对于该题的背景部分的展示如下.

极点极线理论:已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,点 $P(x_0,y_0)$,点 P 对应的极线为 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$.

(1)如图 3,当 $P(x_0,y_0)$ 为椭圆上的点时,极线 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$ 为过 $P(x_0,y_0)$ 的椭圆上的切线.

(2)如图 4,当 $P(x_0,y_0)$ 为椭圆外的点时,过 $P(x_0,y_0)$ 作椭圆的两条切线 PA,PB,两切点的连线 AB 即极线 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$.

(3)如图 5,当 $P(x_0,y_0)$ 为椭圆内一点时,过 P 作两条弦 AB、CD,分别过 A,B 和 C,D 作椭圆的切线,交于 G、H,则 GH 所在的直线即为极线 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$.

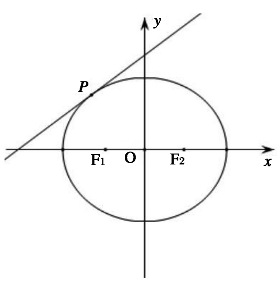

图 3

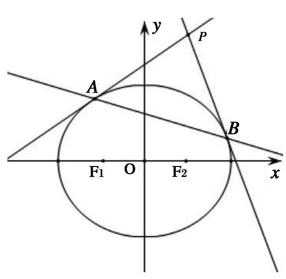

图 4

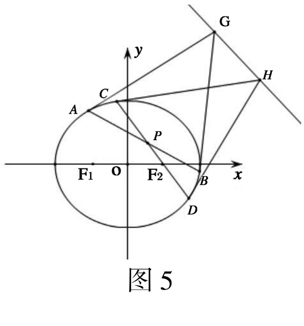

图 5

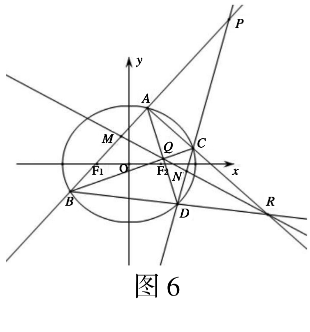

图 6

更一般地,如图 6,过 $P(x_0,y_0)$ 作椭圆的两条割线 AB,CD,则极线必定是 AC,BD 的交点 Q 与直线 AD,BC 的交点 R 的连线 QR,即 QR 所在的直线方程为 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$. 记 QR 与 AB,CD 的连线的交点为 M,N,则 M,N 满足 $\frac{AM}{MB}=\frac{AP}{PB},\frac{DN}{NC}=\frac{DP}{PC}$,$P,A,M,B$ 与 P,D,N,C 为调和点列. 特别地,如图 7,当 $AD\parallel BC$ 时,点 $P(x_0,y_0)$ 对应的极线过 AC,BD 所在直线 l 的交点 Q,且 $l\parallel AD$.

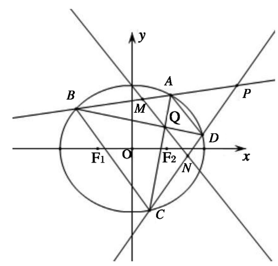

图 7

实际上,P,Q,R 构成自极三角形. 针对本题,极点 $F_2(c,0)$,极线即为椭圆的准线 $x=\frac{a^2}{c}$. 且当极点为 P 时,极线为直线 QT.

评注:题目的背景是解题者思路灵感的基础,能准确把握题目的背景,才能准确突出题目的重点. 本题的背景是极点极线理论,若教师能准确说出题目的内涵或来源,则能充分体现出该教师深厚的功底.

问题 3 变式延伸不充分

笔者在挖掘出题目的背景后,将此题在其背景下作进一步的延伸,即将本题的背景延伸到抛物线和双曲线中.

延伸模型一: 如图 8,已知抛物线 $C_2:y^2=2px$,AB 为过抛物线焦点 $F(\frac{p}{2},0)$ 的焦点弦,分别过 A、B 作切线 l_1,l_2 交于点 Q,则 Q 点落在定直线 $x=-\frac{p}{2}$ 上,且 $AB\perp QF$.

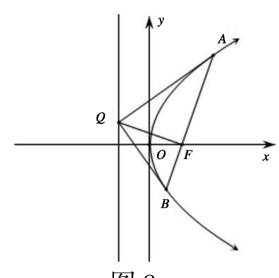

图 8

解析:设 $Q(x_0,y_0)$,则 $l_{AB}:y_0y=p(x_0+x)$,由于 l_{AB} 过右焦点 $F(\frac{p}{2},0)$,则 $x_0=-\frac{p}{2}$,即 $Q(-\frac{p}{2},y_0)$ 落在定直线即抛物线的准线 $x=-\frac{p}{2}$ 上. 另一方面,$k_{AB}=\frac{p}{y_0}$,$k_{QF}=\frac{y_0}{-\frac{p}{2}-\frac{p}{2}}=-\frac{y_0}{p}$,所以 $k_{QF}\cdot k_{AB}=-1$,$QF\perp AB$ 成立.

延伸模型二:如图 9,已知双曲线 $C_3:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$,$AB$ 为过双曲线焦点 $F_2(c,0)$ 的焦点弦,分别过 A、

B 作切线 l_1,l_2 交于点 Q,则 Q 点落在定直线 $x=\frac{a^2}{c}$ 上,且 $AB\perp QF_2$.

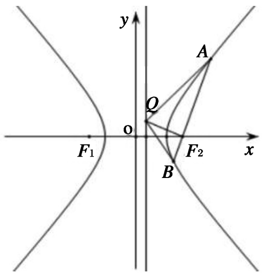

图 9

解析:设 $Q(x_0,y_0)$,则 $l_{AB}:\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$,由于 l_{AB} 过右焦点 $F_2(c,0)$,则 $x_0=\frac{a^2}{c}$,即 $Q(\frac{a^2}{c},y_0)$ 落在定直线即抛物线的准线 $x=\frac{a^2}{c}$ 上. 另一方面,$k_{AB}=\frac{x_0}{y_0}\cdot\frac{b^2}{a^2}=\frac{b^2}{c}\cdot\frac{1}{y_0}$,$k_{QF_2}=\frac{y_0}{\frac{a^2}{c}-c}=-\frac{c\cdot y_0}{b^2}$,所以 $k_{QF_2}\cdot k_{AB}=-1$,即有 $QF\perp AB$ 成立.

评注:模型一就是著名的阿基米德三角形. 实际上,进一步我们可以证明 $AQ\perp QB$. 对于模型二,同模型一,可以进一步说明 $AQ\perp QB$. 变式延伸的环节能体现出该教师对于数学知识的联系和迁移能力,也是教师扎实基本功的直接体现.

问题 4　功能体现不彻底

说题时,最后一个环节是要说题目的功能价值,即该题考察学生的功能性价值,如检测功能、练习功能、教学功能等. 参赛老师对该环节不够重视,甚至一笔带过. 笔者在本题背景的基础上提出了几个变式思考题,在求解的过程中并进一步提出了以极点极线为背景命制的试题往往伴随着"非对称式题型"的处理过程.

题目　已知椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$,点 P 为椭圆上的一个动点,A_1,A_2 分别为左右顶点.

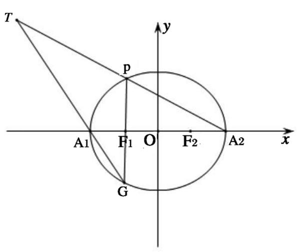

图 10

思考题 1 如图 10,PG 为过左焦点 F_1 的焦点弦,分别过 P、A_2 与 G、A_1 作直线 PA_2,GA_1 交于点 T,证明:点 T 落在定直线上.

解析:设 $l_{PG}:x=my-c$,$P(x_1,y_1)$,$G(x_2,y_2)$,$T(x_0,y_0)$,则 $l_{PA_2}:y=\frac{y_1}{x_1-a}(x-a)$,$l_{GA_1}:y=\frac{y_2}{x_2+a}(x+a)$. 联立 l_{PA_2},l_{GA_1} 得 $\frac{x_0-a}{x_0+a}=\frac{y_2(x_1-a)}{y_1(x_2+a)}=\frac{my_1y_2-(a+c)y_2}{my_1y_2+(a-c)y_1}$. 联立 l_{PG} 与椭圆得 $(m^2b^2+a^2)y^2-2mcb^2y-b^4=0$,则 $y_1+y_2=\frac{2mcb^2}{m^2b^2+a^2}$,$y_1y_2=\frac{-b^4}{m^2b^2+a^2}$,两式相除得 $my_1y_2=-\frac{b^2}{2c}(y_1+y_2)$,代入化简得 $\frac{b^2y_1+(a+c)^2y_2}{(a-c)^2y_1+b^2y_2}=\frac{a+c}{a-c}$,解得 $x_0=-\frac{a^2}{c}$.

实际上,由第三部分延伸的极点极线理论可知,焦点 F_1 作为极点时,极线为准线 $x=-\frac{a^2}{c}$.

思考题 2　如图 11,点 Q 是椭圆长轴上异于左右焦点的定点,连接 PQ 并延长交椭圆于点 G,分别过 P、A_2 与 G、A_1 作直线 PA_2,GA_1 交于点 T,证明点 T 的横坐标为定值.

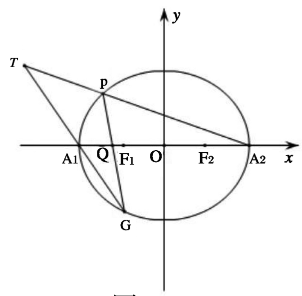

图 11

解析:设 $l_{PG}:x=ty+m$,$P(x_1,y_1)$,$G(x_2,y_2)$,$T(x_0,y_0)$,则 $l_{PA_2}:y=\frac{y_1}{x_1-a}(x-a)$,$l_{GA_1}:y=\frac{y_2}{x_2+a}(x+a)$. 联立 l_{PA_2},l_{GA_1} 可得 $\frac{x_0-a}{x_0+a}=\frac{y_2(x_1-a)}{y_1(x_2+a)}=\frac{ty_1y_2+(m-a)y_2}{ty_1y_2+(m+a)y_1}$. 联立 l_{PG} 与椭圆得 $(t^2b^2+a^2)y^2+2tmb^2y+b^2m^2-a^2b^2=0$,则 $y_1+y_2=\frac{-2tmb^2}{t^2b^2+a^2}$,$y_1y_2=\frac{b^2m^2-a^2b^2}{t^2b^2+a^2}$,两式相除得 $ty_1y_2=-\frac{(m^2-a^2)(y_1+y_2)}{2m}$,代入化简得 $\frac{(a^2-m^2)y_1+(m-a)^2y_2}{(a^2-m^2)y_2+(m+a)^2y_2}=\frac{a-m}{a+m}$,解得 $x_0=\frac{a^2}{m}$. 实际上,由极点极线理论可知,点 $Q(m,0)$ 作为极点时,极线为 $x=\frac{a^2}{m}$.

思考题 3　如图 12,点 $Q(m,0)$ 是椭圆长轴外的定点,连接 PQ 交椭圆于点 G,分别过 P、A_1 与 G、A_2 作直线 PA_1,GA_2 交于点 T,证明点 T 的横坐标为定值.

解析:类似思考题 2,点 $Q(m,0)$ 作为极点时,极线为 $x=\frac{a^2}{m}$.

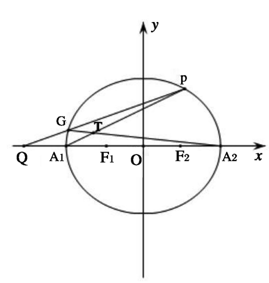

图 12

评注:近两年的浙江省高考圆锥曲线题中,以常规的韦达定理解决往往伴随着较大的计算量. 因此也引起了对圆锥曲线题中"非对称代数式问题"的研究. 笔

者给出的基于极点极线理论的几个思考题,能让学生对该类“非对称式代数式问题”题型的处理方法有更进一步的感悟. 充分体现了该题以及在极点极线为背景名制的试题的教学功能.

总结反思:研题、说题活动可以加强年轻教师之间的业务交流,促进年轻教师的专业发展,从而进一步推进学校教学质量的稳步提升. 笔者从自己参加的比赛为例,谈了自己对说题比赛的切身体会,并在总结反思中不断地成长.

参考文献

[1]施利强,江战明. 圆锥曲线中非对称代数式的处理方法[J]. 教学月刊(中学版). 2020(09).

与其说教解法,不如说教想法

——理想的解题教学之我见

江苏省沙溪高级中学 (215421) 谭海洋

解题教学,是数学教学重要的组成部分. 解题教学的目的是什么,最直白的说法就是让学生学会如何解题. 于是习题课上,教师们往往十分注重解题方法的传授,都希望借助一个问题的解决来突破一类问题的解法,期待通过“一例多练”来达到理想的教学效果,然而往往事与愿违,虽然有些相类似的题目在课堂上教师讲了多遍,学生也练了多遍,但考试中学生对这些题目依然“视若路人”. 那么原因何在? 难道教师重视解法的教学有错? 的确,实践证明只注重传授解法的解题教学是达不到理想的教学效果的. 笔者倒认为,对于解题教学,与其说教解法,不如说教想法,教学生“想法”才是理想的解题教学. 本文结合教学案例谈谈自己的看法.

1、引导学生仔细审题,独立思考,说出“想法”

审题,是解题的“前奏”,学生解题失败往往是因为他们缺乏对题目的认识,缺乏独立思考的能力,为此教师在解题教学中应引导学生加强审题训练,有意识的设置思维障碍,有时可以让学生在“形同质疑”题中“吃点亏”,从内心深处感悟审题的重要性,并通过对比与思考,说出自己的“想法”.

案例 1 一道函数综合题的解法纠错

高一阶段学习了函数内容后,笔者上了一堂函数综合应用的习题课,给出了如下题让学生独立解答.

例 1 已知函数 $f(x)=\log_a(ax^2-x+2)$ 值域为实数集 R,求实数 a 的取值范围.

在解题前,我要求学生认真审题,再交流自己的“想法”.

学生 1:本题给出的是一个关于对数函数与二次函数的复合型函数,我认为只需当 $ax^2-x+2>0$ 就可以使得原函数的值域为实数集 R,于是只需 $\begin{cases}a>0,\\ \triangle=(-1)^2-8a<0,\end{cases}$ 解得 $a>\frac{1}{8}$.

对于这种解法,几乎三分之二的学生认为正确,而其余学生则不认同,但说不出所以然来,于是笔者给出例 1 的变式题:

变式 已知函数 $f(x)=\log_a(ax^2-x+2)$ 定义域为实数集 R,求实数 a 的取值范围.

定义域为实数集 R 就是 $ax^2-x+2>0$ 恒成立,不就是学生 1 的解答吗? 一字之差,怎么会答案完全一致呢? 笔者要求学生再次审题,独立思考,并说出自己的“想法”.

学生 2:学生 1 的解答是错误的,他把定义域为 R 当成了值域为 R. 我认为值域为 R,并不要求定义域为 R,而“定义域为 R”也不能保证“值域为 R”,其实只需内函数 $y=ax^2-x+2$ 的值域中含有 $(0,+\infty)$ 即可. 我是这样解的:

当 $a=0$ 时,函数 $y=ax^2-x+2$ 即为 $y=-x+2$,一次函数的值域为 R,含有 $(0,+\infty)$,符合;

当 $a\neq 0$ 时,只需 $\begin{cases}a>0,\\ \triangle=(-1)^2-8a\geqslant 0,\end{cases}$ 解得 $0<a\leqslant\frac{1}{8}$. 综上,实数 a 的取值范围是 $[0,\frac{1}{8}]$.

学生 3:学生 2 的解答有瑕疵,本题中的字母 a 同时也是底数,所以它不为零,所以内函数 $y=ax^2-x+2$ 不可能是一次函数,无需讨论. 本题的正确答案应该是 $(0,\frac{1}{8}]$.

至此,例 1 的正确解法已“浮出水面”. 在教师的引领下,学生不仅注意到审题的重要性,同时也