江苏省仪征中学 2020 届高三（上）期中考试热身练习 4

班级__________ 姓名__________ 学号__________ 评价__________

一、填空题：

1. 设 $p:1<x<2,q:2^x>1$，则 p 是 q 成立的_____条件（填“充要、充分不必要、必要不充分、既不充分也不必要”）．充分不必要

2. 已知幂函数 $y=x^{2m-m^2}(m\in N^*)$ 在 $(0,+\infty)$ 是增函数，则实数 m 的值是_____． 1

3. 开口向左、通径长为 8 的抛物线的标准方程为_________． $y^2=-8x$

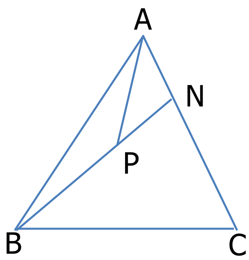
4. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的周期为 6 的奇函数，且满足 $f(1)=1,f(2)=3$，则 $f(8)-f(5)+f(0)-f($ ____. 4

5. 函数 $y=3\sin(x-\frac{\pi}{3})$ 在 $(0,\pi)$ 上的单调减区间是___． $(\frac{5}{6}\pi,\pi)$

6. 已知向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=2$，且 $|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=2$，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为______． $\frac{\pi}{3}$

7. 在 ΔABC 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，若 $a^2-b^2=2bc,\sin C=3\sin B$，则 $A=$______． $\frac{\pi}{3}$

8. 设 $a+b=2,b>0$，则 $\frac{1}{2|a|}+\frac{|a|}{b}$ 的最小值为________． $\frac{3}{4}$



9. 如图，在 ΔABC 中，$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{NC},P$ 是 BN 上的一点，若 $\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{CB}+\frac{7}{13}\overrightarrow{AC}$，则实数 m 的值为_______. $\frac{5}{13}$

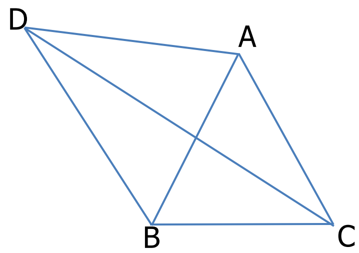
10. 设 F_1，F_2 分别是椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，过 F_2 的直线交椭圆于 A，B 两点，且 $\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AF_2}=0$，$\overrightarrow{AF_2}=2\overrightarrow{F_2B}$，则椭圆 E 的离心率为_________ $\frac{\sqrt{5}}{3}$

11. 设 $\alpha_1,\alpha_2\in R$，且 $\frac{1}{2+\sin\alpha_1}+\frac{1}{2+\sin 2\alpha_2}=2$，则 $|10\pi-\alpha_1-\alpha_2|$ 的最小值为______.

$\frac{\pi}{4}$

12. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}|\lg(-x)|,x<0\\ x^2-4x+3.x\ge 0\end{cases}$，若函数 $F(x)=f^2(x)-2bf(x)+3$ 有 8 个不同的零点，则实数 b 的取值范围是________. $(\sqrt{3},2]$

13．如图，ΔABD 为正三角形，$AC \parallel DB, AC = 4, \cos\angle ABC = \frac{\sqrt{21}}{7}$．



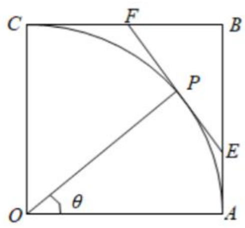
（1）求 $\sin\angle ACB$ 的值；

（2）求 AB，CD 的长.

13.(1) $\sin\angle ACB = \frac{5\sqrt{7}}{14}$

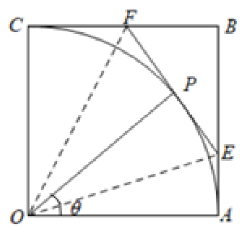
(2)AB=5, $CD = \sqrt{61}$

14. 公园里有一块边长为 1 百米的绿地区域$OABC$，计划在以 0 为圆心，OA为半径的四分之一圆内种植花草，其他区域种植苗木，现决定从A到C修建折线观赏路线$AE - EF - FC$，其中E，F分别在线段AB，BC上，且EF与弧$\widehat{AC}$相切于点P，AE，CF为水泥路面，其工程造价为每米a元，EF为鹅卵石路面，其工程造价是每米 2a元，修路的总造价是W（单位：百元），设$\angle AOP = \theta$，



（1）用θ表示EF的长；　　（2）求E，F选在何处时，总造价W最低？

14.（1）连接OE，OF，$OP \perp EF$，$OA \perp AE$，则$\angle OPE = \angle OAE = 90^\circ$，又$OA = OP = 1$，$OE$是公共边，$\Delta OAE \cong \Delta OPE$，故$AE = PE$，$\angle POE = \angle AOE = \frac{\theta}{2}$.



同理 $\Delta OPF \cong \Delta OCF$，$CF = PF$，$\angle POF = \angle COF = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}$.

$PE = \tan\frac{\theta}{2}$，$PF = \tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2})$ 故 $EF = \tan\frac{\theta}{2} + \tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2})$ $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$

(2)由（1）得 $CF = PF = \tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2})$，$AE = PE = tan\frac{\theta}{2}$，故$AE + CF = EF$，

$W(\theta) = a(CF + AE) + 2aEF = 3aEF = 3a[\,tan\frac{\theta}{2} + tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)]$，$\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$

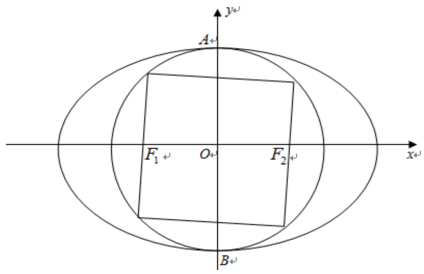
求 W 最小即求 EF 最小，记$f(\theta) = tan\frac{\theta}{2} + tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) = tan\frac{\theta}{2} + \frac{1 - tan\frac{\theta}{2}}{1 + tan\frac{\theta}{2}}$

设$1 + tan\frac{\theta}{2} = t \in (1,2)$，则$tan\frac{\theta}{2} = t - 1$，$f(\theta) = t - 1 + \frac{2-t}{t} = t + \frac{2}{t} - 2 \geq 2\sqrt{2} - 2$

当且仅当$t = \frac{2}{t}$即$t = \sqrt{2}$时取等，此时$tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{2} - 1$，$AE = CF = \sqrt{2} - 1$

$\therefore$当$AE = CF = \sqrt{2} - 1$时，W(θ)最小．

15．如图 A，B 两点是椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 与圆 O：$x^2+y^2=b^2$ 的公共点，F_1，F_2 是椭圆 E 的左右焦点．



（1）若四边形 AF_1BF_2 为正方形，求椭圆 E 的离心率；

（2）①若 F_1，F_2 在圆 O 的内接正方形的边上，求椭圆 E 的离心率的范围；

②若 $b=1$，$e=\frac{\sqrt{2}}{2}$，圆 O 的内接正方形的一边所在直线交椭圆 E 于 M，N 两点，求弦 MN 长度的最大值．

15.（1）四边形 AF_1BF_2 为正方形，则由椭圆对称性得：$b=c$，又 $a^2=b^2+c^2=2c^2$，得 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$；

（2）①因为 F_1，F_2 在圆 O 的内接正方形的边上，所以 $\begin{cases} c\le b \\ c\ge d=\frac{\sqrt{2}}{2}b \end{cases}$ 得 $e\in\left[\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$；

（2）②因为 $b=1$，$e=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $e=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，得 $a^2=2$，$c=1$ 则椭圆方程为：$\frac{x^2}{2}+y^2=1$；

设内接正方形的一边所在直线为 l，圆心 O 到直线 l 的距离 $d=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

⑴当直线 l 垂直于 x 轴时，得直线 l 为：$x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ 联立 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 得 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 $MN=\sqrt{3}$

⑵当直线 l 不与 x 轴垂直于时，设直线 l 为：$y=kx+t$，设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$

即 $kx-y+t=0$，则 $d=\frac{|t|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，则 $2t^2=1+k^2$； 联立 $\begin{cases} y=kx+t \\ \frac{x^2}{2}+y^2=1 \end{cases}$，得：

$(2k^2+1)x^2+4ktx+2t^2-2=0$，则 $x_1+x_2=-\frac{4kt}{2k^2+1}$，$x_1\cdot x_2=\frac{2t^2-2}{2k^2+1}$

$\therefore MN=\sqrt{1+k^2}\cdot|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\left(-\frac{4kt}{2k^2+1}\right)^2-\frac{8t^2-8}{2k^2+1}}$

$=\sqrt{\frac{12k^4+16k^2+4}{4k^4+4k^2+1}}=\sqrt{3+\frac{4k^2+1}{4k^4+4k^2+1}}$

令 $s=4k^2+1$，则 $k^2=\frac{s-1}{4}$，$s\ge1$ $\therefore MN=\sqrt{3+\frac{4}{s+\frac{1}{s}+2}}\le2$，当且仅当 $s=1,k=0$ 时取等号

综上，MN 最大值为 2．

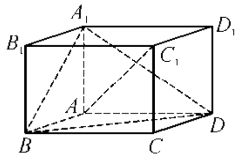
16.（4-2 矩阵变换）将直线$l: x-2y-2\sqrt{2}=0$绕原点按顺时针方向旋转$\dfrac{\pi}{4}$后得到直线 m,求直线 m 的方程

$x+3y+4=0$

17. 在平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1\perp$面 $ABCD$，且 $AB=AD=2$，$AA_1=\sqrt{3}$，$\angle BAD=120°$．

（1）求异面直线 A_1B 与 AC_1 所成角的余弦值；

（2）求二面角 $B\text{-}A_1D\text{-}A$ 的正弦值．



解：(1)异面直线 A_1B 与 AC_1 所成角的余弦值为$\dfrac{1}{7}$.

(2)二面角 BA_1DA 的正弦值为$\dfrac{\sqrt{7}}{4}$.

18、一个盒子里装有 3 张大小形状完全相同的卡片，分别标有数 2，3，4；另一个盒子也装有 4 张大小形状完全相同的卡片，分别标有数 3，4，5。 现从一个盒子中任取一张卡片，其上面的数记为 x；再从另一盒子里任取一张卡片，其上面的数记为 y，记随机变量η＝x＋y，

（1）求事件$x\le y$发生的概率（2）求η的分布列和数学期望。

18.

22、解析：（1）$p=\dfrac{8}{9}$ ……3 分

（2）依题意，可分别取$\eta=5$、6、7、8、9 取，则有

$p(\eta=5)=\dfrac{1}{3\times3}=\dfrac{1}{9},p(\eta=6)=\dfrac{2}{9},p(\eta=7)=\dfrac{3}{9},p(\eta=8)=\dfrac{2}{9},p(\eta=9)=\dfrac{1}{9}$

$\therefore\eta$ 的分布列为 ……8 分

η	5	6	7	8	9
p	$\dfrac{1}{9}$	$\dfrac{2}{9}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{2}{9}$	$\dfrac{1}{9}$

$E\eta=7$ ……10 分