江苏省仪征中学2020届高三上学期数学周末限时训练9（2019.11.9）

一、填空题

1．已知 i 为虚数单位，若复数 z 满足 $\dfrac{z}{1-2i}=1+i$，则复数 z＝_______.

2．函数 $y=\sqrt{4-2^x}$ 的定义域为_______.

3．已知 x，$y\in$R，直线 $(a-1)x+y-1=0$ 与直线 $x+ay+2=0$ 垂直，则实数 a 的值为_______.

4．已知函数 $f(x)$ 为偶函数，且 x＞0 时，$f(x)=x^3+x^2$，则 $f(-1)$＝_______.

5．已知向量 $\vec{m}$＝(1，a)，$\vec{n}$＝($\dfrac{4}{a}$，$3a+1$)，若 $\vec{m}$ // $\vec{n}$，则实数 a＝_______.

6．设△ABC 的三个内角 A，B，C 的对边分别是 a，b，c，若 $a=2\sqrt{6}$，$b=6$，cosB＝$-\dfrac{1}{2}$，那么角 A 的大小为_______.

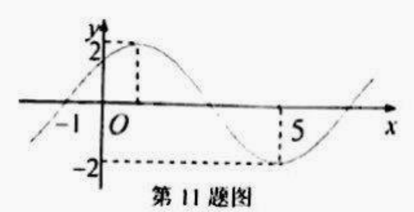
7．设实数 x，y 满足 $\begin{cases}x-y\ge 0\\ x+y\le 1\\ x+2y\ge 1\end{cases}$，则 $3x+2y$ 的最大值为_______.

8．在平面直角坐标系 xOy 中，若抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上横坐标为 1 的点到焦点的距离为 4，则该抛物线的准线方程为_______.

9. 已知条件 p：x＞a，条件 q：$\dfrac{1-x}{x+2}>0$. 若 p 是 q 的必要不充分条件，则实数 a 的取值范围是_______.

10．在平面直角坐标系 xOy 中，已知双曲线 $\dfrac{x^2}{m}-\dfrac{y^2}{m+1}=1$ 的一个焦点为(3，0)，则双曲线的渐近线方程为_______.

11．若函数 $f(x)=\mathrm{A}\sin(\omega x+\varphi)$ (A＞0，$\omega>0$，$0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$) 的部分图像如图所示，则函数 $f(x)$ 在[$-\pi$，0]上的单调增区间为_______.



第 11 题图

12．在△ABC 中，AH 是边 BC 上的高，点 G 是△ABC 的重心，若△ABC 的面积为 $\sqrt{6}+1$，AC＝$\sqrt{5}$，tanC＝2，则 $(\overrightarrow{\mathrm{AH}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{GB}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}})$＝_______.

13．已知正实数 a，b 满足 $2a+b=3$，则 $\dfrac{2a^2+1}{a}+\dfrac{b^2-2}{b+2}$ 的最小值是_______.

14．已知函数 $f(x)=2\sqrt{2}x-x^2$，$g(x)=\ln x-ax+5$（e 为自然对数的底数，e≈2.718）．对于任意的 $x_0\in$(0，e)，在区间(0，e)上总存在两个不同的 x_1，x_2，使得 $g(x_1)=g(x_2)=f(x_0)$，则整数 a 的取值集合是_______.

二、解答题

15．在△ABC 中，已知 $\sqrt{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|$，设∠BAC＝$\alpha$．

（1）求 $\tan\alpha$ 的值；（2）若 $\cos\beta=\dfrac{3}{5}$，$\beta\in(0，\dfrac{\pi}{2})$，求 $\cos(\beta-\alpha)$的值．

解：（1）由 $\sqrt{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|$，得 $\sqrt{3}\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos\alpha=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|$，

所以 $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，又因为 $0<\alpha<\pi$，所以 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-(\dfrac{1}{\sqrt{3}})^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$． ∴ $\tan\alpha=\sqrt{2}$

（2）∵ $\cos\beta=\dfrac{3}{5}$，$\beta\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ ∴ $\sin\beta=\dfrac{4}{5}$

由（1）知：$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$，∴ $\cos(\beta-\alpha)=\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{4}{5}\times\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{3\sqrt{3}+4\sqrt{6}}{15}$．

16．已知 $a\in R$，函数 $f(x)=a-\dfrac{1}{|x|}$．

（1）若 $f(x)\le 2x$ 对 $x\in(0，2)$恒成立，求实数 a 的取值范围；

（2）当 a＝1 时，解不等式 $f(x)\ge 2x$．

解：（1）∵ $f(x)\le 2x$ 对 $x\in(0,2)$ 恒成立 ∴ $a\le\dfrac{1}{x}+2x$ 对 $x\in(0,2)$ 恒成立

∵ $\dfrac{1}{x}+2x\ge 2\sqrt{2}$，当且仅当 $\dfrac{1}{x}=2x$，即 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时取等号， ∴ $a\le 2\sqrt{2}$

（2）当 $a=1$时，$f(x)=1-\dfrac{1}{|x|}$，∵ $f(x)\ge 2x$ ∴ $1-\dfrac{1}{|x|}\ge 2x$ ……（*）

①若 $x>0$，则（*）可化为：$2x^2-x+1\le 0$，所以 $x\in\varnothing$； …9 分

②若 $x<0$，则（*）可化为：$2x^2-x-1\ge 0$，解得：$x\ge 1$或 $x\le-\dfrac{1}{2}$，∵ $x<0$ ∴ $x\le-\dfrac{1}{2}$

由①②可得，（*）的解集为 $(-\infty,-\dfrac{1}{2}]$． …14 分

17．在平面直角坐标系 xOy 中，已知直线 $x-3y-10=0$ 与圆 O：$x^2+y^2=r^2(r>0)$ 相切．

（1）直线 l 过点(2，1)且截圆 O 所得的弦长为 $2\sqrt{6}$，求直线 l 的方程；

（2）已知直线 y＝3 与圆 O 交于 A，B 两点，P 是圆上异于 A，B 的任意一点，且直线 AP，BP 与 y 轴相交于 M，N 点．判断点 M、N 的纵坐标之积是否为定值?若是，求出该定值；若不是，说明理由．

解：∵直线 $x-3y-10=0$ 与圆 $O:x^2+y^2=r^2(r>0)$ 相切

∴圆心 O 到直线 $x-3y-10=0$ 的距离为 $r=\dfrac{|10|}{\sqrt{1+9}}=\sqrt{10}$． …2 分

（1）记圆心到直线 l 的距离为 d，所以 $d=\sqrt{10-6}=2$．

当直线 l 与 x 轴垂直时，直线 l 的方程为 $x=2$，满足题意； …3 分

当直线 l 与 x 轴不垂直时，设直线 l 的方程为 $y-1=k(x-2)$，即 $kx-y+(1-2k)=0$，

所以 $d=\dfrac{|1-2k|}{\sqrt{1+k^2}}=2$，解得 $k=-\dfrac{3}{4}$，此时直线 l 的方程为 $3x+4y-10=0$ …6 分

综上，直线 l 的方程为 $x=2$ 或 $3x+4y-10=0$． …7 分

（2）设 $P(x_0,y_0)$．∵直线 $y=3$ 与圆 O 交于 A、B 两点，不妨取 $A(1,3),B(-1,3)$，

∴直线 PA、PB 的方程分别为 $y-3=\dfrac{y_0-3}{x_0-1}(x-1)$， $y-3=\dfrac{y_0-3}{x_0+1}(x+1)$

令 $x=0$，得 $M(0,\dfrac{3x_0-y_0}{x_0-1}),N(0,\dfrac{3x_0+y_0}{x_0+1})$，则 $y_M\cdot y_N=\dfrac{3x_0-y_0}{x_0-1}\cdot\dfrac{3x_0+y_0}{x_0+1}=\dfrac{9x_0^2-y_0^2}{x_0^2-1}$ （*）…13 分

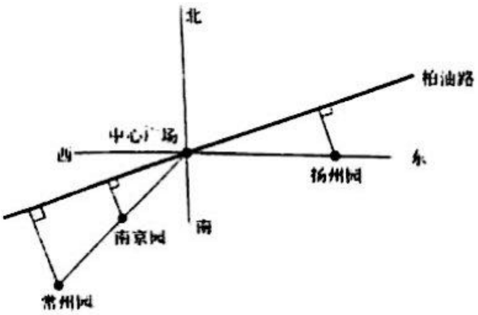
因为点 $P(x_0,y_0)$ 在圆 C 上，

所以 $x_0^2+y_0^2=10$，即 $y_0^2=10-x_0^2$，代入（*）式得 $y_M\cdot y_N=\dfrac{9x_0^2-(10-x_0^2)}{x_0^2-1}=10$ 为定值．

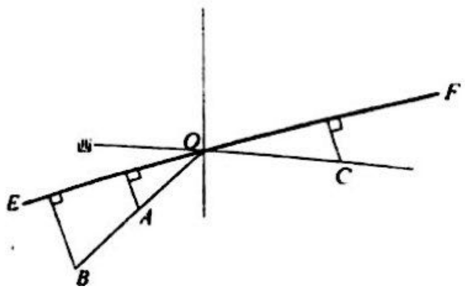
18．江苏省园博会有一中心广场，南京园，常州园都在中心广场的南偏西 45° 方向上，到中心广场的距离分别为 $\sqrt{2}$ *km*，$2\sqrt{2}$ *km*；扬州园在中心广场的正东方向，到中心广场的距离为 $\sqrt{10}$ *km*．规划建设一条笔直的柏油路穿过中心广场，且将南京园，常州园，扬州园到柏油路的最短路径铺设成鹅卵石路（如图(1)、(2)）．已知铺设每段鹅卵石路的费用（万元）与其长度的平方成正比，比例系数为 2．设柏油路与正东方向的夹角，即图(2)中∠COF 为 θ（$\theta\in(0,\dfrac{\pi}{4})$），铺设三段鹅卵石路的总费用为 y（万元）．

（1）求南京园到柏油路的最短距离 d_1 关于 θ 的表达式；

（2）求 y 的最小值及此时 $\tan\theta$ 的值．



（1）



（2）

解：（1）∵ $\angle COF=\theta$，南京园在中心广场的南偏西 45 °方向上，且到中心广场的距离为 $\sqrt{2}km$

∴ $\angle AOE=\dfrac{\pi}{4}-\theta$ ∴ $d_1=\sqrt{2}\sin(\dfrac{\pi}{4}-\theta)$ ………4 分

（2）分别设点 B,C 到直线 EF 的距离为 d_2,d_3．由（1）知：$d_2=2\sqrt{2}\sin(\dfrac{\pi}{4}-\theta),d_3=\sqrt{10}\sin\theta$

$$\therefore y=2[(\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}-\theta))^2+(2\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}-\theta))^2+(\sqrt{10}\sin\theta)^2]=20[\frac{1-\cos(\frac{\pi}{2}-2\theta)}{2}+\frac{1-\cos2\theta}{2}]$$

$=20-10(\sin2\theta+\cos2\theta)]=20-10\sqrt{2}\sin(2\theta+\dfrac{\pi}{4})$，$\theta\in(0,\dfrac{\pi}{4})$ ………9 分

∵ $\theta\in(0,\dfrac{\pi}{4})$ ∴ $2\theta+\dfrac{\pi}{4}\in(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4})$ ∴当 $2\theta+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$ 时，$y_{\min}=20-10\sqrt{2}$（万元）

此时 $2\theta=\dfrac{\pi}{4}$ $\quad\therefore \tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=1$，解得：$\tan\theta=\sqrt{2}-1$ ………14 分

答：铺设三条鹅卵石路的总费用为$(20-10\sqrt{2})$万元，此时 $\tan\theta$ 的值为 $\sqrt{2}-1$．………15 分

19．在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右准线方程为 $x=2$，且两焦点与短轴的一个顶点构成等腰直角三角形．

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）假设直线 l：$y=kx+m$ 与椭圆 C 交于 A，B 两点．①若 A 为椭圆的上顶点，M 为线段 AB 中点，连接 OM 并延长交椭圆 C 于 N，并且 $\overrightarrow{ON}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\overrightarrow{OM}$，求 OB 的长；②若原点 O 到直线 l 的距离为 1，并且 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\lambda$，当 $\dfrac{4}{5}\le\lambda\le\dfrac{5}{6}$ 时，求△OAB 的面积 S 的范围．

解：（1）因为两焦点与短轴的一个顶点的连线构成等腰直角三角形，所以 $a=\sqrt{2}c$，

又由右准线方程为 $x=2$，得到 $\dfrac{a^2}{c}=2$，解得 $a=\sqrt{2},c=1$，所以 $b^2=a^2-c^2=1$

所以，椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ …4 分

（2）设 $B(x_1,y_1)$，而 $A(0,1)$，则 $M(\dfrac{x_1}{2},\dfrac{1+y_1}{2})$，$\because$ $\overrightarrow{ON}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\overrightarrow{OM}$，$\therefore$ $N(\dfrac{\sqrt{6}x_1}{4},\dfrac{\sqrt{6}(1+y_1)}{4})$

因为点 B,N 都在椭圆上，所以 $\begin{cases}\dfrac{x_1^2}{2}+y_1^2=1\\ \dfrac{3x_1^2}{16}+\dfrac{3(1+y_1)^2}{8}=1\end{cases}$，将下式两边同时乘以 $\dfrac{8}{3}$ 再减去上式，

解得 $y_1=\dfrac{1}{3}$，$x_1{}^2=\dfrac{16}{9}$ …8 分 所以 $OB=\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2}=\sqrt{\dfrac{16}{9}+(\dfrac{1}{3})^2}=\dfrac{\sqrt{17}}{3}$ …9 分

（3）由原点 O 到直线 l 的距离为 1，得 $\dfrac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，化简得：$1+k^2=m^2$

联立直线 l 的方程与椭圆 C 的方程：$\begin{cases}y=kx+m\\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1\end{cases}$，得 $(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-2=0$

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=-\dfrac{4km}{1+2k^2},x_1x_2=\dfrac{2m^2-2}{1+2k^2}$，且 $\Delta=8k^2>0$ …11 分

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+(kx_1+m)(kx_2+m)=(1+k^2)x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2$$

$$=(1+k^2)\frac{2m^2-2}{1+2k^2}-\frac{4k^2m^2}{1+2k^2}+m^2=\frac{2m^2-2+2k^2m^2-2k^2-4k^2m^2+m^2+2k^2m^2}{1+2k^2}$$

$$=\frac{3m^2-2-2k^2}{1+2k^2}=\frac{1+k^2}{1+2k^2}=\lambda$$，所以 $k^2=\dfrac{1-\lambda}{2\lambda-1}$

△OAB 的面积 $S=\dfrac{1}{2}\times1\times AB=\dfrac{1}{2}\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\dfrac{1}{2}\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{1+k^2}\sqrt{\frac{8k^2}{(1+2k^2)^2}}=\sqrt{2}\sqrt{\frac{(1+k^2)k^2}{(1+2k^2)^2}}=\sqrt{2\lambda(1-\lambda)}$$ …14 分

因为$S=\sqrt{2\lambda(1-\lambda)}$在$[\frac{4}{5},\frac{5}{6}]$为单调减函数，并且当$\lambda=\frac{4}{5}$时，$S=\frac{2\sqrt{2}}{5}$，当$\lambda=\frac{5}{6}$时，$S=\frac{\sqrt{10}}{6}$，

所以$\triangle OAB$的面积S的范围为$[\frac{\sqrt{10}}{6},\frac{2\sqrt{2}}{5}]$.

20．已知函数$f(x)=\frac{\ln x}{x}$，$g(x)=x^2-2x$.

（1）求$f(x)$在点P(1，$f(1)$)处的切线方程；

（2）若关于x的不等式$f^2(x)+tf(x)>0$有且仅有三个整数解，求实数t的取值范围；

（3）若$h(x)=g(x)+4xf(x)$存在两个正实数x_1，x_2满足$h(x_1)+h(x_2)-{x_1}^2{x_2}^2=0$，

求证：$x_1+x_2\geq 3$.

解：（1）$f(x)=\frac{\ln x}{x}$，$f(1)=0$，所以P点坐标为$(1,0)$；

又$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，$f'(1)=1$，则切线方程为$y-0=x-1$，

所以函数$f(x)$在点$P(1,f(1))$处的切线方程为$x-y-1=0$.　　…3 分

（2）$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}(x>0)$

x	$(0,e)$	e	$(e,+\infty)$
$f'\ x$	正	0	负
$f\ \ x$	单调增	极大值	单调减

由$f^2(x)+tf(x)>0$，　得$f(x)[f(x)+t]>0$；

① $t>0$时，$f(x)>0$或$f(x)<-t$，满足条件的整数解有无数个，舍；

② $t=0$时，$f(x)\neq 0$，得$x>0$且$x\neq 1$，满足条件的整数解有无数个，舍；

③ $t<0$时，$f(x)<0$或$f(x)>-t$，当$f(x)<0$时，无整数解；

当$f(x)>-t$时，不等式有且仅有三个整数解，又$f(3)=\frac{\ln 3}{3}$，$f(2)=f(4)=\frac{\ln 2}{2}$，$f(5)=\frac{\ln 5}{5}$

因为$f(x)$在$(0,e)$递增，在$(e,+\infty)$递减；所以$f(5)\leq -t<f(4)$，　即$\frac{\ln 5}{5}\leq -t<\frac{\ln 2}{2}$，即

$-\frac{\ln 2}{2}<t\leq-\frac{\ln 5}{5}$；所以实数$t$的取值范围为$-\frac{\ln 2}{2}<t\leq-\frac{\ln 5}{5}$.　　…8 分

（3）$h(x)=x^2-2x+4\ln x$，因为$h(x_1)+h(x_2)-x_1^2x_2^2=0$，

所以${x_1}^2-2x_1+4\ln x_1+{x_2}^2-2x_2+4\ln x_2-x_1^2x_2^2=0$，

即$(x_1+x_2)^2-2(x_1+x_2)=x_1^2x_2^2+2x_1x_2-4\ln x_1x_2$，令$t=x_1x_2$，$\varphi(t)=t^2+2t-4\ln t(t>0)$，　　…11 分

则$\varphi'(t)=2t+2-\frac{4}{t}=\frac{2(t-1)(t+2)}{t}(t>0)$，

当$t\in(0,1)$时，$\varphi'(t)<0$，所以函数$\varphi(t)=t^2+2t-4\ln t(t>0)$在$(0,1)$上单调递减；

当$t\in(1,+\infty)$时，$\varphi'(t)>0$，所以函数$\varphi(t)=t^2+2t-4\ln t(t>0)$在$(1,+\infty)$上单调递增.

所以函数$\varphi(t)=t^2+2t-4\ln t(t>0)$在$t=1$时，取得最小值，最小值为 3．…14 分

因为存在两个正实数x_1,x_2，满足$h(x_1)+h(x_2)-x_1^2x_2^2=0$，所以$(x_1+x_2)^2-2(x_1+x_2)\geqslant 3$，

即$(x_1+x_2)^2-2(x_1+x_2)-3\geqslant 0$，所以$x_1+x_2\geqslant 3$或$x_1+x_2\leqslant -1$.

因为x_1,x_2为正实数，所以$x_1+x_2\geqslant 3$.　　…16 分

（附加题）

21、（10 分）在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y=kx+1$ 在矩阵 $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ 对应的变换下得到的直线过点 P（3，2），求实数 k 的值.

22、（10 分）假定某人在规定区域投篮命中的概率为 $\dfrac{2}{3}$，现他在某个投篮游戏中，共投篮 3 次.

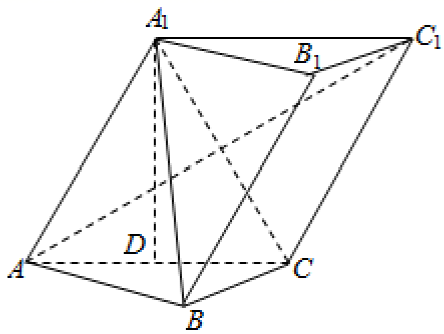
（1）求连续命中 2 次的概率；

（2）设命中的次数为 X，求 X 的分布列和数学期望 $E(X)$.

23、（10 分）如图，三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 中，∠BCA=90°，AC=BC=AA_1=A_1C=2，平面 ACC_1A_1⊥平面 ABC.现以边 AC 的中点 D 为坐标原点，平面 ABC 内垂直于 AC 的直线为 x 轴，直线 AC 为 y 轴，直线 DA_1 为 z 轴建立空间直角坐标系，解决以下问题:

（1）求异面直线 AB 与 A_1C 所成角的余弦值；

（2）求直线 AB 与平面 A_1BC 所成角的正弦值.



24、（10 分）已知正项数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=a_n-a_n^{\ 2}(n\in N^*)$.

（1）求证: $0<a_1<1$，且当 $n\geq 2$ 时，$a_n\leq\dfrac{1}{n+2}$；

（2）求证: $\sum\limits_{i=2}^{n}a_i<\ln(n+1)$.

参考答案

1． $3-i$　2． $(-\infty,2]$　3． $\frac{1}{2}$　4． 2　5． 1　6． $\frac{\pi}{4}$　7． 3　8． $x=-3$

9． $a\le -2$　10． $y=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}x$　11． $(-3,0)$(区间开闭皆可)　12．1　13． $\frac{13}{5}$　14． $\{3,4,5,6,7\}$

15．解：（1）由 $\sqrt{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|$，得 $\sqrt{3}\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos\alpha=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|$，

所以 $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$， 又因为 $0<\alpha<\pi$，所以 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-(\frac{1}{\sqrt{3}})^2}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

∴ $\tan\alpha=\sqrt{2}$　　…………6 分

（2）∵ $\cos\beta=\frac{3}{5}$， $\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$　∴ $\sin\beta=\frac{4}{5}$　　………8 分

由（1）知： $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$，∴ $\cos(\beta-\alpha)=\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha=\frac{3}{5}\times\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}+4\sqrt{6}}{15}$.

………14 分

16．解：（1）∵ $f(x)\le 2x$ 对 $x\in(0,2)$ 恒成立 ∴ $a\le\frac{1}{x}+2x$ 对 $x\in(0,2)$ 恒成立

∵ $\frac{1}{x}+2x\ge 2\sqrt{2}$，当且仅当 $\frac{1}{x}=2x$，即 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取等号

∴ $a\le 2\sqrt{2}$　　…6 分

（2）当 $a=1$时， $f(x)=1-\frac{1}{|x|}$，∵ $f(x)\ge 2x$　∴ $1-\frac{1}{|x|}\ge 2x$　……（*）

①若 $x>0$，则（*）可化为： $2x^2-x+1\le 0$，所以 $x\in\varnothing$；　　…9 分

②若 $x<0$，则（*）可化为： $2x^2-x-1\ge 0$，解得： $x\ge 1$或 $x\le -\frac{1}{2}$，∵ $x<0$　∴ $x\le -\frac{1}{2}$　…12 分

由①②可得，（*）的解集为 $(-\infty,-\frac{1}{2}]$.　　…14 分

17．解：∵直线 $x-3y-10=0$ 与圆 $O:x^2+y^2=r^2(r>0)$ 相切

∴圆心 O 到直线 $x-3y-10=0$ 的距离为 $r=\frac{|10|}{\sqrt{1+9}}=\sqrt{10}$.　　…2 分

（1）记圆心到直线 l 的距离为 d，所以 $d=\sqrt{10-6}=2$.

当直线 l 与 x 轴垂直时，直线 l 的方程为 $x=2$，满足题意；　　…3 分

当直线 l 与 x 轴不垂直时，设直线 l 的方程为 $y-1=k(x-2)$，即 $kx-y+(1-2k)=0$

所以$d=\frac{|1-2k|}{\sqrt{1+k^2}}=2$，解得$k=-\frac{3}{4}$，此时直线$l$的方程为$3x+4y-10=0$ …6 分

综上，直线l的方程为$x=2$或$3x+4y-10=0$． …7 分

（2）设$P(x_0,y_0)$．∵直线$y=3$与圆O交于A、B两点，不妨取$A(1,3),B(-1,3)$，

∴直线PA、PB的方程分别为$y-3=\frac{y_0-3}{x_0-1}(x-1)$，$y-3=\frac{y_0-3}{x_0+1}(x+1)$

令$x=0$，得$M(0,\frac{3x_0-y_0}{x_0-1}),N(0,\frac{3x_0+y_0}{x_0+1})$，则$y_M\cdot y_N=\frac{3x_0-y_0}{x_0-1}\cdot\frac{3x_0+y_0}{x_0+1}=\frac{9x_0^2-y_0^2}{x_0^2-1}$（*）…13 分

因为点$P(x_0,y_0)$在圆C上，所以$x_0^2+y_0^2=10$，即$y_0^2=10-x_0^2$，代入（*）式

得$y_M\cdot y_N=\frac{9x_0^2-(10-x_0^2)}{x_0^2-1}=10$为定值． …15 分

18．解：（1）∵$\angle COF=\theta$，南京园在中心广场的南偏西 45 °方向上，且到中心广场的距离为$\sqrt{2}km$

∴$\angle AOE=\frac{\pi}{4}-\theta$　∴$d_1=\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}-\theta)$ ………4 分

（2）分别设点B,C到直线EF的距离为d_2,d_3．由（1）知：$d_2=2\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}-\theta),d_3=\sqrt{10}\sin\theta$

∴$y=2[(\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}-\theta))^2+(2\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}-\theta))^2+(\sqrt{10}\sin\theta)^2]=20[\frac{1-\cos(\frac{\pi}{2}-2\theta)}{2}+\frac{1-\cos2\theta}{2}]$

$=20-10(\sin2\theta+\cos2\theta)]=20-10\sqrt{2}\sin(2\theta+\frac{\pi}{4})$，$\theta\in(0,\frac{\pi}{4})$ ………9 分

∵$\theta\in(0,\frac{\pi}{4})$　∴$2\theta+\frac{\pi}{4}\in(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})$　∴当$2\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$时，$y_{\min}=20-10\sqrt{2}$（万元） …12 分

此时$2\theta=\frac{\pi}{4}$　∴$\tan2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=1$，解得：$\tan\theta=\sqrt{2}-1$ ………14 分

答：铺设三条鹅卵石路的总费用为($20-10\sqrt{2}$)万元，此时$\tan\theta$的值为$\sqrt{2}-1$．………15 分

19．解：（1）因为两焦点与短轴的一个顶点的连线构成等腰直角三角形，所以$a=\sqrt{2}c$，

又由右准线方程为$x=2$，得到$\frac{a^2}{c}=2$，

解得$a=\sqrt{2},c=1$，所以$b^2=a^2-c^2=1$

所以，椭圆C的方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$　…4 分

（2）设$B(x_1,y_1)$，而$A(0,1)$，则$M(\frac{x_1}{2},\frac{1+y_1}{2})$，

$\because$ $\overrightarrow{ON}=\frac{\sqrt{6}}{2}\overrightarrow{OM}$，　$\therefore$ $N(\frac{\sqrt{6}x_1}{4},\frac{\sqrt{6}(1+y_1)}{4})$

因为点B,N都在椭圆上，所以

$\begin{cases}\frac{x_1^2}{2}+y_1^2=1\\ \frac{3x_1^2}{16}+\frac{3(1+y_1)^2}{8}=1\end{cases}$，将下式两边同时乘以$\frac{8}{3}$再减去上式，解得$y_1=\frac{1}{3}$，$x_1{}^2=\frac{16}{9}$ …8 分

所以$OB=\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2}=\sqrt{\frac{16}{9}+(\frac{1}{3})^2}=\frac{\sqrt{17}}{3}$　…9 分

（3）由原点O到直线l的距离为1，得$\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，化简得：$1+k^2=m^2$

联立直线l的方程与椭圆C的方程：$\begin{cases}y=kx+m\\ \frac{x^2}{2}+y^2=1\end{cases}$，得$(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-2=0$

设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则$x_1+x_2=-\frac{4km}{1+2k^2},x_1x_2=\frac{2m^2-2}{1+2k^2}$，且$\Delta=8k^2>0$ …11 分

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+(kx_1+m)(kx_2+m)=(1+k^2)x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2$

$=(1+k^2)\frac{2m^2-2}{1+2k^2}-\frac{4k^2m^2}{1+2k^2}+m^2=\frac{2m^2-2+2k^2m^2-2k^2-4k^2m^2+m^2+2k^2m^2}{1+2k^2}$

$=\frac{3m^2-2-2k^2}{1+2k^2}=\frac{1+k^2}{1+2k^2}=\lambda$，

所以$k^2=\frac{1-\lambda}{2\lambda-1}$

$\triangle OAB$的面积$S=\frac{1}{2}\times1\times AB=\frac{1}{2}\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\frac{1}{2}\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{1+k^2}\sqrt{\frac{8k^2}{(1+2k^2)^2}}=\sqrt{2}\sqrt{\frac{(1+k^2)k^2}{(1+2k^2)^2}}=\sqrt{2\lambda(1-\lambda)}$ …14 分

因为$S=\sqrt{2\lambda(1-\lambda)}$在$[\frac{4}{5},\frac{5}{6}]$为单调减函数，

并且当$\lambda=\frac{4}{5}$时，$S=\frac{2\sqrt{2}}{5}$，当$\lambda=\frac{5}{6}$时，$S=\frac{\sqrt{10}}{6}$，

所以△OAB的面积S的范围为$[\frac{\sqrt{10}}{6},\frac{2\sqrt{2}}{5}]$．…16 分

20．解:（1） $f(x)=\frac{\ln x}{x}$， $f(1)=0$，所以P点坐标为$(1,0)$；

又$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$， $f'(1)=1$，则切线方程为$y-0=x-1$，

所以函数$f(x)$在点$P(1,f(1))$处的切线方程为$x-y-1=0$． …3 分

（2） $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}(x>0)$

x	$(0,e)$	e	$(e,+\infty)$
$f'\ x$	正	0	负
$f\ \ x$	单调增	极大值	单调减

由$f^2(x)+tf(x)>0$， 得$f(x)[f(x)+t]>0$；

④ $t>0$时， $f(x)>0$或$f(x)<-t$，满足条件的整数解有无数个，舍;

⑤ $t=0$时， $f(x)\neq 0$，得$x>0$且$x\neq 1$，满足条件的整数解有无数个，舍;

⑥ $t<0$时， $f(x)<0$或$f(x)>-t$，当$f(x)<0$时，无整数解;

当$f(x)>-t$时，不等式有且仅有三个整数解，又$f(3)=\frac{\ln 3}{3}$， $f(2)=f(4)=\frac{\ln 2}{2}$， $f(5)=\frac{\ln 5}{5}$

因为$f(x)$在$(0,e)$递增，在$(e,+\infty)$递减；所以$f(5)\le -t<f(4)$， 即$\frac{\ln 5}{5}\le -t<\frac{\ln 2}{2}$，即$-\frac{\ln 2}{2}<t\le -\frac{\ln 5}{5}$；

所以实数t的取值范围为$-\frac{\ln 2}{2}<t\le -\frac{\ln 5}{5}$． …8 分

（3）$h(x)=x^2-2x+4\ln x$，

因为$h(x_1)+h(x_2)-x_1^2x_2^2=0$，

所以$x_1^2-2x_1+4\ln x_1+x_2^2-2x_2+4\ln x_2-x_1^2x_2^2=0$，

即$(x_1+x_2)^2-2(x_1+x_2)=x_1^2x_2^2+2x_1x_2-4\ln x_1x_2$，

令$t=x_1x_2$， $\varphi(t)=t^2+2t-4\ln t(t>0)$， …11 分

则$\varphi'(t)=2t+2-\frac{4}{t}=\frac{2(t-1)(t+2)}{t}(t>0)$，

当$t\in(0,1)$时， $\varphi'(t)<0$，所以函数$\varphi(t)=t^2+2t-4\ln t(t>0)$在$(0,1)$上单调递减;

当 $t\in(1,+\infty)$ 时，$\varphi'(t)>0$，所以函数 $\varphi(t)=t^2+2t-4\ln t(t>0)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

所以函数 $\varphi(t)=t^2+2t-4\ln t(t>0)$ 在 $t=1$ 时，取得最小值，最小值为 3. …14 分

因为存在两个正实数 x_1,x_2，满足 $h(x_1)+h(x_2)-x_1^2x_2^2=0$，所以 $(x_1+x_2)^2-2(x_1+x_2)\geqslant 3$，

即 $(x_1+x_2)^2-2(x_1+x_2)-3\geqslant 0$，所以 $x_1+x_2\geqslant 3$ 或 $x_1+x_2\leqslant -1$.

因为 x_1,x_2 为正实数，所以 $x_1+x_2\geqslant 3$. …16 分

（加试部分）

21．解：设直线 $y=kx+1$ 上任意点 $M(x,y)$ 在矩阵 $\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}$ 对应的变换下得到的点 $M'(x',y')$，则

$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y\\x+y\end{bmatrix}$，即 $\begin{cases}x'=y\\y'=x+y\end{cases}$，$\therefore\begin{cases}x=-x'+y'\\y=x'\end{cases}$ …5 分

代入直线方程 $y=kx+1$ 得：$x'=k(-x'+y')+1$，将 $P(3,2)$ 代入上式，解得：$k=-2$. …10 分

22．解：（1）设 $A_i(i=1,2,3)$ 表示第 i 次投篮命中，$\overline{A_i}$ 表示第 i 次投篮不中；设投篮连续命中 2 次为事件 A，则 $P(A)=P(A_1A_2\overline{A_3}+\overline{A_1}A_2A_3)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$. …4 分

（2）命中的次数 X 可取 0，1，2，3；

$P(X=0)=(1-\frac{2}{3})^3=\frac{1}{27}$，$P(X=1)=C_3^1(\frac{2}{3})^1(1-\frac{2}{3})^2=\frac{2}{9}$，$P(X=2)=C_3^2(\frac{2}{3})^2(1-\frac{2}{3})^1=\frac{4}{9}$，

$P(X=3)=(\frac{2}{3})^3=\frac{8}{27}$

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

…8 分

所以 $E(X)=1\times\frac{2}{9}+2\times\frac{4}{9}+3\times\frac{8}{27}=2$

答：X 的数学期望为 2. …10 分

23．（1）根据题中空间直角坐标系可知：$A(0,-1,0)$，$C(0,1,0)$，$B(2,1,0)$，$A_1(0,0,\sqrt{3})$， …1 分

$\therefore \overrightarrow{AB}=(2,2,0),\overrightarrow{A_1C}=(0,1,-\sqrt{3})$

$\therefore \cos<\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A_1C}>=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A_1C}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{A_1C}|}=\frac{2\times0+2\times1+0\times(-\sqrt{3})}{\sqrt{2^2+2^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$ …3 分

设异面直线 AB 与 A_1C 的所成角为 α，则 $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2}]$，$\therefore \cos\alpha=|\cos<\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A_1C}>|=\frac{\sqrt{2}}{4}$ …4 分

（2）由（1）得：$\overrightarrow{A_1B}=(2,1,-\sqrt{3}),\overrightarrow{BC}=(-2,0,0)$，设平面 A_1BC 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

$\therefore \begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{A_1B} \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{BC} \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{A_1B} = 2x + y - \sqrt{3}z = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = -2x = 0 \end{cases}$，取 $z=1$，则 $\vec{n}=(0,\sqrt{3},1)$ …7 分

$\therefore \cos < \overrightarrow{AB}, \vec{n} > = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{AB}||\vec{n}|} = \dfrac{2\times 0 + 2\times\sqrt{3} + 0\times 1}{\sqrt{2^2+2^2}\cdot\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$.　　…9 分

设直线 AB 与平面 A_1BC 所成角为 β，$\beta \in (0, \dfrac{\pi}{2}]$，则 $\sin\beta = |\cos < \overrightarrow{AB}, \vec{n} >| = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$．…10 分

24．证明：（1）由 $a_1 - a_1^2 = a_2 > 0$，解得 $0 < a_1 < 1$．…1 分

下用数学归纳法证明：当 $n \ge 2$ 时，$a_n \le \dfrac{1}{n+2}$

①当 $n=2$ 时，$a_2 = a_1 - a_1^2 = -(a_1 - \dfrac{1}{2})^2 + \dfrac{1}{4} \le \dfrac{1}{4}$．所以不等式成立；

②假设当 $n=k(k\ge 2)$ 时，不等式成立，即 $a_k \le \dfrac{1}{k+2}$

则当 $n=k+1$ 时，有

$a_{k+1} = a_k - a_k^2 = -(a_k - \dfrac{1}{2})^2 + \dfrac{1}{4} \le -(\dfrac{1}{k+2} - \dfrac{1}{2})^2 + \dfrac{1}{4} = \dfrac{k+1}{(k+2)^2} < \dfrac{k+1}{(k+1)(k+3)} = \dfrac{1}{(k+1)+2}$

则当 $n=k+1$ 时，不等式也成立.

综合①②，当 $n \ge 2$ 时，都有 $a_n \le \dfrac{1}{n+2}$．　…5 分

（2）记 $f(x) = \ln(1+x) - \dfrac{x}{1+x} (x > 0)$　　…6 分

当 $x>0$ 时，$f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1}{(1+x)^2} = \dfrac{x}{(1+x)^2} > 0$

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，则 $f(x) > f(0) = 0$，即 $\ln(1+x) > \dfrac{x}{1+x}$　…8 分

令 $x = \dfrac{1}{i+1} (i \in N^*)$，则 $\dfrac{1}{i+2} < \ln\dfrac{i+2}{i+1} < \ln\dfrac{i+1}{i}$，

从而有 $\sum_{i=2}^{n} a_i < \sum_{i=2}^{n} \dfrac{1}{i+2} < \sum_{i=2}^{n} [\ln(i+1) - \ln i] = \ln(n+1) - \ln 2 < \ln(n+1)$．　…10 分