因为对任意的 $x\in\mathbf{R}$，不等式 $f'(x)\leqslant 4x$ 恒成立，即对任意的 $x\in\mathbf{R}$，不等式 $3ax^2+6x-1\leqslant 4x$ 恒成立，所以对任意的 $x\in\mathbf{R}$，不等式 $3ax^2+2x-1\leqslant 0$ 恒成立.

当 $a=0$ 时，对任意的 $x\in\mathbf{R}$，$2x-1\leqslant 0$ 不恒成立；

当 $a<0$ 时，若对任意的 $x\in\mathbf{R}$，不等式 $3ax^2+2x-1\leqslant 0$ 恒成立，

则 $\Delta=4+12a\leqslant 0$，所以 $a\leqslant -\frac{1}{3}$；

当 $a>0$ 时，对任意的 $x\in\mathbf{R}$，不等式 $3ax^2+2x-1\leqslant 0$ 不恒成立.

综上，实数 a 的取值范围是 $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right]$.

训 练 二

1. $\frac{8}{9}$ **【解析】**从两盒中随机各取一球，没有红球的概率为 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$，故至少有一个红球的概率为 $1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$.

2. 3 **【解析】**由 $(\boldsymbol{a}-m\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$，得 $(\boldsymbol{a}-m\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=0$，即 $\boldsymbol{a}^2-m\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=9-m\times 3\times 2\times\cos 60^\circ=0$，解得 $m=3$.

3. 0 **【解析】**由 $\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$，得 $\sin\alpha+\cos\alpha=0$，所以 $\sin 2\alpha=-1$，故 $\cos 2\alpha=0$.

4. ± 2 **【解析】**由题知圆的半径 $r=2$，劣弧所对的圆心角为 120°，则圆心到直线的距离为 $\frac{1}{2}r=1$，即 $\frac{|-b|}{\sqrt{3+1}}=1$，解得 $b=\pm 2$.

5. $\frac{24}{5}$ **【解析】方法一**：因为 $a_2=3$，$a_1=1$，$2na_n=(n-1)a_{n-1}+(n+1)a_{n+1}$. 当 $n=2$ 时，$2\times 2a_2=a_1+3a_3$，得 $a_3=\frac{11}{3}$；当 $n=3$ 时，$2\times 3a_3=2a_2+4a_4$，得 $a_4=\frac{16}{4}$；当 $n=4$ 时，$2\times 4a_4=3a_3+5a_5$，得 $a_5=\frac{21}{5}$. 由 $a_1=\frac{1}{1}$，$a_2=\frac{6}{2}$，$a_3=\frac{11}{3}$，$a_4=\frac{16}{4}$，$a_5=\frac{21}{5}$ 归纳出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\frac{5n-4}{n}$，则 $a_{20}=\frac{5\times 20-4}{20}=\frac{24}{5}$.

方法二：因为 $a_1=1$，$a_2=3$，$2na_n=(n-1)\cdot a_{n-1}+(n+1)a_{n+1}$，所以数列 $\{na_n\}$ 是等差数列，首项为 1，公差为 $2a_2-a_1=5$，所以 $na_n=5n-4$，所以 $20a_{20}=5\times 20-4=96$，故 $a_{20}=\frac{24}{5}$.

6. $(0,2^{\frac{1}{9}}]\cup[2,+\infty)$ **【解析】**两边取以 2 为底的对数，则 $(3x-4)\log_2 a\geqslant x^2-x$，即 $x^2-(1+3\log_2 a)x+4\log_2 a\leqslant 0$，所以 $\Delta=(1+3\log_2 a)^2-16\log_2 a\geqslant 0$，整理得 $9(\log_2 a)^2-10\log_2 a+1\geqslant 0$，即 $\log_2 a\leqslant\frac{1}{9}$ 或 $\log_2 a\geqslant 1$，则 $0<a\leqslant 2^{\frac{1}{9}}$ 或 $a\geqslant 2$.

7. (1) 因为 $A+B+C=\pi$，
所以 $\sin(A+B)=\sin C$，
从而
$$\begin{aligned}1&=\sin(A-B)+\sin C\\&=\sin(A-B)+\sin(A+B)\\&=(\sin A\cos B-\cos A\sin B)+(\sin A\cdot\cos B+\cos A\sin B)\\&=2\sin A\cos B,\end{aligned}$$
故 $\sin A\cos B=\frac{1}{2}$.

(2) 由 $a=2b$ 及正弦定理得 $\sin A=2\sin B$，

故 $\sin A\cos B=2\sin B\cos B=\sin 2B=\frac{1}{2}$，

且 $\sin A=2\sin B\leqslant 1$，所以 $\sin B\leqslant\frac{1}{2}$.

因为 $a=2b$，所以 $a>b$，从而 $A>B$，

故 $B\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right]$，即 $2B\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right]$，

所以 $2B=\frac{\pi}{6}$，所以 $B=\frac{\pi}{12}$.

8. (1) 因为三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 是直三棱柱，
所以 $B_1B\perp$ 底面 ABC.
因为 $AD\subset$ 底面 ABC，所以 $B_1B\perp AD$.
因为 $AB=AC$，D 是 BC 的中点，所以 $AD\perp BC$.
又因为 $BC\cap B_1B=B$，$BC,BB_1\subset$ 平面 B_1BCC_1，所以 $AD\perp$ 平面 B_1BCC_1.

(2) 如图，连接 A_1C 交 AC_1 于点 O，连接 OD，
因为 O 是矩形 A_1ACC_1 对角线的交点，
所以 O 是 A_1C 的中点.
又因为 D 是 BC 的中点，所以 OD 是 $\triangle A_1BC$ 的中位线，所以 $A_1B\parallel OD$.