圆锥曲线的第三定义及运用

一、 椭圆和双曲线的第三定义

1. 椭圆

在椭圆C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a\succ b\succ 0\right)$中，A、B 是关于原点对称的两点，P 是椭圆上异于 A、B 的一点，若k_{PA}、k_{PB}存在，则有：$k_{PA}\bullet k_{PB}=e^2-1=-\frac{b^2}{a^2}$

证明:构造△PAB 的 PA 边所对的中位线 MO，$k_{PA}=k_{MO}$，由点差法结论：$k_{MO}\bullet k_{PB}=e^2-1=-\frac{b^2}{a^2}$

知此结论成立。

2. 双曲线

在双曲线C:$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$中，A、B 是关于原点对称的两点，P 是椭圆上异于 A、B 的一点，若k_{PA}、k_{PB}存在，则有：$k_{PA}\bullet k_{PB}=e^2-1=\frac{b^2}{a^2}$

证明：只需将椭圆中的b^2全部换成$-b^2$就能将椭圆结论转换成双曲线的结论。

二、 与角度有关的问题

例题一： 已知椭圆C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a\succ b\succ 0\right)$的离心率$e=\frac{\sqrt{3}}{2}$，A、B 是椭圆的左右顶点，为椭圆与双曲线$\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{8}=1$的一个交点，令$\angle$PAB=$\alpha$，$\angle$APB=$\beta$ ，则$\frac{\cos\beta}{\cos\left(2\alpha+\beta\right)}=$ ________.

解答：

令$\angle PBx=\gamma$，由椭圆第三定义可知：$\tan\alpha\bullet\tan\gamma=e^2-1=-\frac{1}{4}$

点评：

其实所谓的双曲线方程只是一个障眼法，并不影响题目的解答。两顶点一动点的模型要很快的联想到第三定义，那么剩下的任务就是把题目中的角转化为两直线的倾斜角，把正余弦转化为正切。题目中的正余弦化正切是三角函数的常见考点☆。

变式 1-1：（石室中学 2015 级高二下 4 月 18 日周末作业）

已知双曲线C：$x^2-y^2=2015$ 的左右顶点分别为 A、B，P 为双曲线右支一点，且 $\angle PAB=4\angle APB$，求 $\angle PAB=$____________.

解答：

令 $\angle PAB=\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，$\angle PBA=\beta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，则 $\beta=5\alpha$，由双曲线的第三定义知：

则：$\tan\alpha=\frac{1}{\tan5\alpha}=\tan\left(\frac{\pi}{2}-5\alpha\right)\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{2}-5\alpha\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{12}$

点评：

与例题 1 采取同样的思路转化角，但对于正切转换的要求较高。两锐角正切乘积为 1 即表示 sinα =cosβ，cosα=sinβ⇒两角互余☆，则可解出 α 的值。当然双曲线的题目较于椭圆和抛物线题目考试概率较小，但既然提到了双曲线的第三定义，不妨做一做。

三、 与均值定理有关的问题

例题 2：已知 A、B 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a\succ b\succ 0\right)$ 长轴的两个端点，M、N 是椭圆上关于 x 轴对称的两点，直线AM、BN的斜率分别为 k_1、k_2，且 $k_1k_2\neq 0$。若 $\left|k_1\right|+\left|k_2\right|$ 的最小值为 1，则椭圆的离心率为________.

解答一（第三定义+均值）：

由题意可作图如下：

连接 MB，由椭圆的第三定义可知：$k_{AM}\bullet k_{BM}=e^2-1=-\frac{b^2}{a^2}$，而 $k_{BM}=-k_{BN}\Rightarrow\therefore k_1k_2=\frac{b^2}{a^2}$

解答二（特殊值法）：

这道题由于表达式$\left(|k_1|+|k_2|\right)_{\min}=1$非常对称，则可直接猜特殊点求解。$|k_1|=|k_2|=\frac{1}{2}$时可取最值，则 M、N 分别为短轴的两端点。此时：$|k_1|=|k_2|=\frac{b}{a}=\frac{1}{2}\Rightarrow e=\frac{\sqrt{3}}{2}$。

点评：

对于常规解法，合理利用 M、N 的对称关系是解题的关键，这样可以利用椭圆的第三定义将两者斜率的关系联系起来，既构造了“一正”，又构造了“二定”，利用均值定理“三相等”即可用 a、b 表示出最值 1。当然将$|k_1|$、$|k_2|$前的系数改为不相等的两个数，就不能利用特殊值法猜答案了，但常规解法相同，即**变式 2-1**。

变式 2-1：已知 A、B 是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a\succ b\succ 0\right)$长轴的两个端点，M、N 是椭圆上关于 x 轴对称的两点，直线 AM、BN 的斜率分别为k_1、k_2，且$k_1k_2\neq 0$。若$\sqrt{2}|k_1|+2\sqrt{2}|k_2|$的最小值为 1，则椭圆的离心率为______________.

解答：

连接 MB，由椭圆的第三定义可知：$k_{AM}\bullet k_{BM}=e^2-1=-\frac{b^2}{a^2}$，而$k_{BM}=-k_{BN}\Rightarrow \therefore k_1k_2=\frac{b^2}{a^2}$

变式 2-2：已知 A、B 是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a\succ b\succ 0\right)$长轴的两个端点，若椭圆上存在 Q，使$\angle AQB=\frac{2\pi}{3}$，则椭圆的离心率的取值范围为______________.

解答一（正切+均值）：

令 Q 在 x 轴上方，则直线 QA 的倾斜角为$\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，直线 QB 的倾斜角为$\beta\in\left[\frac{\pi}{2},\ \pi\right]$。

$\angle AQB\in\left[\frac{\pi}{2},\ \pi\right]$，$\tan\angle AQB=\tan\left(\beta-\alpha\right)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$

由椭圆的第三定义：$\tan\alpha\tan\beta=-\frac{b^2}{a^2}$，则$\tan\beta=-\frac{b^2}{a^2\tan\alpha}$

带入可得：$\dfrac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=\dfrac{-\dfrac{b^2}{a^2\tan\alpha}-\tan\alpha}{1-\dfrac{b^2}{a^2}}=\dfrac{-\left(\dfrac{b^2}{a^2\tan\alpha}+\tan\alpha\right)}{1-\dfrac{b^2}{a^2}}$

$\le\dfrac{-2\sqrt{\dfrac{b^2}{a^2\tan\alpha}\bullet\tan\alpha}}{1-\dfrac{b^2}{a^2}}=\dfrac{\dfrac{-2b}{a}}{1-\dfrac{b^2}{a^2}}=\dfrac{-2ab}{a^2-b^2}$ （取等条件：$\tan\alpha=\dfrac{b}{a}$，即 Q 为上顶点）

而 tanx 在$\left[\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right]$单增，则 Q 为上顶点时$(\angle AQB)_{\max}$，所以此时$\angle AQB\ge\dfrac{2}{3}\pi$，故$e\in\left[\dfrac{\sqrt{6}}{3},1\right)$

解答二（极限法）：

当 Q 趋近于 A、B 两点时，$\angle AQB\to\dfrac{\pi}{2}$（此时 Q 点所在的椭圆弧趋近于以 AB 为直径的圆的圆弧，$\angle AQB$相当于直径所对的圆周角）；当 Q 在 A、B 间运动时$\angle AQB\succ\dfrac{\pi}{2}$（Q 在以 AB 为直径的圆内部，$\angle AQB\succ$直径所对的圆周角=90°），由椭圆的对称性可猜测当 Q 为短轴端点时$(\angle AQB)_{\max}$。

由于：椭圆上存在 Q，使$\angle AQB=\dfrac{2\pi}{3}$，那么 Q 为短轴端点时$(\angle AQB)_{\max}\ge\dfrac{2\pi}{3}$。

取临界情况，即 Q 为短轴端点时$\angle AQB=\dfrac{2\pi}{3}$，此时$\dfrac{a}{b}=\sqrt{3}\Rightarrow e=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$；当椭圆趋于饱满（$e\to0$）时，椭圆趋近于圆，圆的直径所对的圆周角永远为 90°，不满足；当椭圆趋于线段（$e\to1$）时，$(\angle AQB)_{\max}\to\pi$，满足。故$e\in\left[\dfrac{\sqrt{6}}{3},1\right)$。

当然这些只需要在头脑中一想而过，简洁而有逻辑。

点评：

这道题可以增加对于圆周角的理解，在用极限法讨论："当 Q 趋近于 A、B 两点时，$\angle AQB\to\dfrac{\pi}{2}$"时能会颠覆"$\angle AQB\to\pi$"的认知，当然这肯定是错的，结合常规解法可以看出此时是角最小的情况，而不是角最大的情况。要搞清楚，不然会被弄晕的。对于常规解法选择正切表示角的大小的原因有二：

①与第三定义发生联系②tanx 在$\left[\frac{\pi}{2},\ \pi\right]$单增便于利用 tanx 的大小比较角度的大小。

四、 总结归纳

1. 上述部分题目的常规解法较复杂，但做题时一定要能猜答案，而且要猜得有理由。
2. 对于均值不等式，注意取等条件是“三相等”，即相等时取最值。这可以帮助猜测表达形式是高度对称的式子的最值，如：**例题 2**
3. 极限法可以刻画出单调变化的某一变量的端点值，如：**变式 2-2** 中 P 在椭圆上滑动，角度的变化一定是光滑的（无突变，连续）， 所以只需考虑边界值。
4. 做几何的选填题时，有时利用圆周角定理可以很快的找到最大角，注意学会恰当运用，如：**变式 2-2。**
5. 常以正切值刻画角度大小。
6. 在做综合性较大的题目时要联系各种知识，灵活转化，以最巧妙的方法致胜。
7. ____.
8. ____.

五、 方法链接

针对上文提到的“圆周角找最大角”与“椭圆中另一类均值”进行拓展补充，各附例题。

例题 3：在平面直角坐标系 XOY 中，给定两点$M\left(-1,2\right)$ 和$N\left(1,4\right)$，点 P 在 X 轴上移动，当$\angle MPN$ 取最大值时，点 P 的横坐标为______________.

解答一（正切+均值）：

已知：$M\left(-1,2\right)$ 、$N\left(1,4\right)$，$l_{MN}:y=x+3$与 x 轴交于$P_0\left(-3,0\right)$

令$P\left(t,0\right)$，则：$k_{MP}=\frac{2}{-1-t}$，$k_{NP}=\frac{4}{1-t}$，$\angle MPN=\theta$

① 当$t=-3$时，$\theta=0$

② 当$t \succ -3$时，l_{MP}的倾斜角较大，$\tan\theta = \dfrac{k_{MP}-k_{NP}}{1+k_{MP}\bullet k_{NP}} = \dfrac{2t+6}{t^2+7}$

令$x = t+3 \succ 0$，则$\tan\theta = \dfrac{2t+6}{t^2+7} = \dfrac{2x}{x^2-6x+16} = \dfrac{2}{x+\dfrac{16}{x}-6} \le \dfrac{2}{2\sqrt{x\bullet\dfrac{16}{x}}-6}$=1（$\tan\theta \succ 0$）

此时$x=4$，$t=1$，$\theta_{\max} = \dfrac{\pi}{4}$

③ 当$t \prec -3$时，l_{NP}的倾斜角较大，$\tan\theta = \dfrac{k_{NP}-k_{MP}}{1+k_{MP}\bullet k_{NP}} = -\dfrac{2t+6}{t^2+7}$

$x = -(t+3) \succ 0$，则$\tan\theta = -\dfrac{2t+6}{t^2+7} = \dfrac{2x}{x^2+6x+16} = \dfrac{2}{x+\dfrac{16}{x}+6} \le \dfrac{2}{2\sqrt{x\bullet\dfrac{16}{x}}+6} = \dfrac{1}{7}$

（$\tan\theta \succ 0$）

此时$x=4$，$t=-7$，$\tan(\theta_{\max}) = \dfrac{1}{7}$

由于$\theta \in [0,\ \pi)$，且$\tan\theta$在$\theta \in [0,\ \pi)$上单增，$\tan\theta \in [0,1]$

$\therefore \theta_{\max} = \dfrac{\pi}{4}$，此时$t=1$

解答二（圆周角定理）：

本题中的取极值时的 P 点的几何意义为：过 M、N 的圆与 x 轴切于 P 点。下面给出证明：

证明：以与 x 轴切于P_2点的圆满足所求最大角为例：

由于l_{MN}：$y = x+3$是过 M、N 两点的圆的一条弦，由垂径定理知圆心在l：$y = -x+3$上

随着圆心横坐标从 0 开始增大：当半径 r 较小时，圆与 x 轴无交点；当半径稍大一点时，圆与 x 轴相切，有一个交点；当半径更大一点时，圆与 x 轴有两交点P_3、P_4。

此时：根据圆周角定理：$\angle MP_3N = \angle MP_4N \prec \angle MQN = \angle MP_2N$，可知：圆与 x 轴相切时，$(\angle MPN)_{\max}$。

R 较小的情况（圆与 x 轴相离）　　　　R 较大的情况（圆与 x 轴相交于P_3、P_4）

所以：过 M、N 的圆与 x 轴切于P_3、P_4点时，分别有$(\angle MPN)_{\max}$

$\Rightarrow$只需比较$\angle MP_1N$与$\angle MP_2N$，哪一个更大。

令与 x 轴相切的圆的圆心为(x,y)，则切点$P(x,0)$，半径为 y

圆满足：$\begin{cases}(x+1)^2+(y-2)^2=y^2\\(x-1)^2+(y-4)^2=y^2\end{cases}\Rightarrow x^2-6x+7=0\Rightarrow x=-7or1$ （消去 y）

比较可知：当 x=1 时，$(\angle MPN)_{\max}$

点评：

常规方法依旧是利用正切度量角的大小，但注意用倾斜角表示所求角时要用大角减去小角，才能得到正角；均值时要注意以分子（一次）为新元构建均值。用圆周角角的性质解答，只要转化为切点，解一个方程组，比较两个角谁大就行了。（不比较也行，画图可知右边角大于左边角：弦长相等，半径越大，弦所对的圆周角越小。）**其实两种解法的难度是一样，只是一种要写得多，一种要想得多。**☆

变式 3-1：若 G 为△ABC 的重心，且$AG\perp BG$，则$\sin C$的最大值为______________.

解答一（余弦定理+均值）：

令$G(0,0)$，$A(a,0)$，$B(0,\mathrm{b})$，则由$\begin{cases}x_G=\dfrac{1}{3}(x_A+x_B+x_C)\\y_G=\dfrac{1}{3}(y_A+y_B+y_C)\end{cases}\Rightarrow C(-a,-b)$

由点间的距离公式：$|AB|=\sqrt{a^2+b^2}$，$|AC|=\sqrt{4a^2+b^2}$，$|BC|=\sqrt{a^2+4b^2}$

由余弦定理：$\cos C=\dfrac{|AC|^2+|BC|^2-|AB|^2}{2\times|AC|\times|BC|}=\dfrac{(4a^2+b^2)+(a^2+4b^2)-(a^2+b^2)}{2\sqrt{(4a^2+b^2)\times(a^2+4b^2)}}$

由于：$\sqrt{ab}\le\dfrac{a+b}{2}\Rightarrow\sqrt{(4a^2+b^2)\times(a^2+4b^2)}\le\dfrac{5}{2}(a^2+b^2)$

解法二（圆周角定理）：

令$A(-1,0)$，$B(1,0)$，$\mathrm{G}(\sin\theta,\cos\theta)$，则$\mathrm{C}(3\sin\theta,3\cos\theta)$

题目转化为：$A(-1,0)$，$B(1,0)$，$\mathrm{C}(x,y)$满足：$x^2+y^2=9$，求$\sin C$的最大值。

目测可知$\mathrm{C}(0,\pm3)$时，$(\angle ABC)_{\max}$，下面以$\mathrm{C}'(0,3)$来证明。

过$A(-1,0)$，$B(1,0)$，$\mathrm{C}'(0,3)$作圆 O：

若 C 不在C'点，令 AC 交圆 O 于 Q 点。由圆周角定理：$\angle ACB \prec \angle AQB = \angle AC'B$ 证得

此时由余弦定理$\therefore \left(\cos C\right)_{\min} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \left(\sin C\right)_{\max} = \frac{3}{5}$

点评：

可以说这道题与**例题 3** 有异曲同工之妙，直观感觉加上圆周角定理可以说是画几个圆就解出题了。其实余弦函数在$\left[0,\ \pi\right]$单调，也可用来度量角的大小。

不过更值得一提的是两种方法以不同的方式，间接地表现了题中点的关系，设点的方式☆值得思考领悟。解法一照顾垂直结论，把重心放在原点，利用重心的坐标很好地刻画了 C 点的坐标；解法二联系圆的直径所对圆周角为直角表示垂直条件，以同样方式刻画 C 点的坐标。两种方式都完全的展现了题目中的关系。

例题 4：(对椭圆用均值)：过椭圆$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1\left(a \succ b \succ 1\right)$上一点 P 引圆 O：$x^2 + y^2 = 1$的两条切线 PA、PB，其中 A、B 为切点，直线 AB 与 x 轴、y 轴分别相交于 M、N，则△OMN 面积的最小值为______________.

解答：设$P\left(x_0, y_0\right)$，P 点满足$\frac{{x_0}^2}{b^2} + \frac{{y_0}^2}{a^2} = 1 \Rightarrow 1 \ge 2\sqrt{\frac{{x_0}^2}{b^2} \bullet \frac{{y_0}^2}{a^2}} = \frac{2\left|x_0 y_0\right|}{ab} \Leftrightarrow \left|x_0 y_0\right| \le \frac{ab}{2}$

$P\left(x_0, y_0\right)$在圆外，则圆的切点弦方程为：$x_0 x + y_0 y = 1 \Rightarrow M\left(\frac{1}{x_0}, 0\right)$、$M\left(0, \frac{1}{y_0}\right)$

点评：

解法巧妙，很难想到，权当欣赏。注意看到题目就要马上联想到圆的切点弦方程，当遇到面积表达式中含有$\left|x_0 y_0\right|$时，可对椭圆进行均值，构造$\left|x_0 y_0\right|$的范围。