在反思和追根中提升解题教学效益
——以一道向量题为例

林 松

（江苏省仪征市第三中学 211400）

数学习题“题海无边”，如果解题和解题教学就题论题，则永远做不完、讲不尽. 解题和解题教学只有“回头是岸”，加强解题后的回顾反思和追根求源，才能跳离题海、事半功倍，提升解题和解题教学的效益. 这里的反思和追根是对解题思路、问题本质进行反思和求源. 通过反思与追根利于学生数学核心素养的培养和落实. 下面以一道向量题为例进行一番反思和追根.

1 习题的呈现

如图1，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=CD$，点 M、N 分别是边 AD、BC 的中点，延长 BA 与 CD 交 NM 的延长线于不同的两点 P、Q，则 $\overrightarrow{PQ}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC})$ 的值为________.

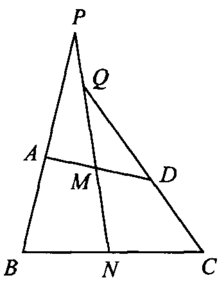

图1

此题是一道平面向量数量积运算问题，是平面向量的核心内容. 此题蕴含丰富的数学思想和方法，如转化思想、数形结合、特殊化等，是落实数学核心素养难得的知识载体. 在教学中应让学生充分展示解题思路，引导学生对解题的思路进行反思，对问题的数学本质进行挖掘，探索数学问题的根源，激发学生的学习兴趣，提升学生的数学素养.

2 学生思路展示及反思

2.1 基底法思路及反思

（1）思路

教学中，学生认为基底法是解决向量问题的常用方法，展示了如下解法：

（解法一）如图2，

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}, \quad ①$$

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CN}. \quad ②$$

因为点 M、N 分别是边 AD、BC 的中点，所以

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}=\mathbf{0},$$

$$\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CN}=\mathbf{0}.$$

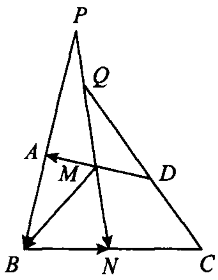

图2

所以由①＋②可得，

$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}).$$

所以 $\overrightarrow{MN}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC})=\frac{1}{2}(|\overrightarrow{AB}|^2-|\overrightarrow{DC}|^2)=0.$

因为 $\overrightarrow{PQ}/\!/\overrightarrow{MN}$，所以可设 $\overrightarrow{PQ}=\lambda\overrightarrow{MN}$，

所以 $\overrightarrow{PQ}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC})=0.$

（2）反思

教学中应引导学生反思以下问题：①基底法的本质是什么？②应用基底法解题的关键是什么？③为什么选择 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CD}$ 作为基底？通过对上述3个问题的反思，让学生理解基底法的本质是平面向量基本定理；应用基底法解题的关键在于选择好基底；理解由于题中只有 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 的长度是可知的，所以把 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CD}$ 作为一组基底，用 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 向量来表示 $\overrightarrow{MN}$. 通过采用基底法解决此问题，用平面向量的三角形法则和平行四边形法则进行向量运算，培养学生的向量运算能力，落实学生的逻辑推理和数学运算素养.

2.2 坐标法思路及反思

教学中，学生提出为何用坐标法解决该题需要计算 $\overrightarrow{MN}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC})$？教师可引导学生发现求 P、Q 点较繁，而 $\overrightarrow{PQ}$ 与 $\overrightarrow{MN}$ 平行，因而可以先算 $\overrightarrow{MN}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC})$.

（1）思路

（解法二）以 N 为原点，BC 所在直线为 x 轴建立如图3所示的直角坐标系.

设 $B(-x_0,0)$,$C(x_0,0)$,$A(x_1,y_1)$,$D(x_2,y_2)$,

则 $M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$,

所以 $\overrightarrow{MN}=\left(-\frac{x_1+x_2}{2},-\frac{y_1+y_2}{2}\right)$,

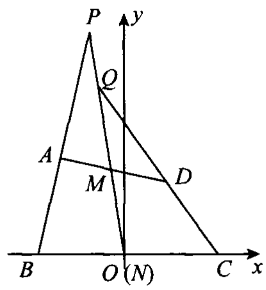

图 3

$\overrightarrow{AB}=(-x_0-x_1,-y_1)$,

$\overrightarrow{DC}=(x_0-x_2,-y_2)$,

所以 $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}=(-2x_0-(x_1-x_2),-(y_1-y_2))$,

所以 $\overrightarrow{MN}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC})=\frac{x_1+x_2}{2}[2x_0+(x_1-x_2)]+\frac{y_1+y_2}{2}(y_1-y_2)=x_0(x_1+x_2)+\frac{(x_1^2-x_2^2)+(y_1^2-y_2^2)}{2}$.

又因为 $AB=DC$,

所以 $(-x_0-x_1)^2+y_1^2=(x_0-x_2)^2+y_2^2$,

所以 $(x_1^2-x_2^2)+(y_1^2-y_2^2)=-2x_0(x_1+x_2)$,

所以 $\overrightarrow{MN}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC})=0$.

(2)反思

教学中应引导学生反思以下问题:①坐标法解决向量问题的本质是什么?②解题过程中是如何实现简化运算的?通过引导学生反思,理解用坐标法处理向量问题也是一种常见思路,其本质上就是几何问题代数化.应注意引导学生对条件和目标进行差异分析,确定计算方向,简化运算,培养学生的数学运算素养.

2.3 直观猜想法思路及反思

教学中,少数学生直观感觉到 $\angle BPN$ 与 $\angle CQN$ 是相等的,并由“$\angle CQN=\angle BPN$”得到结论:$\overrightarrow{PQ}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC})=0$.当然,这个思路还不够成熟,但却是一个很不错的念头.$\angle BPN$ 与 $\angle CQN$ 真的相等吗?这激起了学生探究热情,学生利用平面几何的方法给予了证明.

(1)思路

证明:如图 4,取 AC 的中点 K,连接 MK、NK.

因为 M、K 分别为 AD、AC 中点,

所以 $MK \underline{\mathbin{/\!/}} \frac{1}{2}CD$.

所以 $\angle CQN=\angle KMN$.

同理 $KN \underline{\mathbin{/\!/}} \frac{1}{2}AB$,

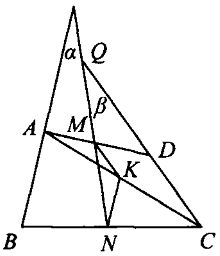

图 4

所以 $\angle KNM=\angle BPN$.

又因为 $AB=CD$,所以 $KN=KM$,

所以 $\angle KMN=\angle KNM$,所以 $\angle CQN=\angle BPN$.

(2)反思

平面几何知识具有“形”的直观,与高中数学中的平面向量具有相同的本质.在解决一些关于平面向量问题的试题时,可以结合平面图形的性质,利用平面几何的知识去解决,可以另辟蹊径,换一个思路解决问题,落实了学生直观想象和逻辑推理素养.

通过反思,学生可以利用“$\angle CQN=\angle BPN$”,结合向量数量积定义可得到原题如下创新解法:

(解法三)如图 4,设 $\angle BPN=\alpha$,$\angle CQN=\beta$,则 $\alpha=\beta$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC})&=\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{DC}\\&=|\overrightarrow{PQ}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cos\alpha-|\overrightarrow{PQ}|\cdot|\overrightarrow{DC}|\cos\beta\\&=|\overrightarrow{PQ}|\cos\alpha(|\overrightarrow{AB}|-|\overrightarrow{DC}|)=0.\end{aligned}$$

(解法四)如图 5,还可以利用几何方法得到如下解法:

作 BR,使 $BR \underline{\mathbin{/\!/}} DC$,作 $\angle PBR$ 的角平分线 BT 交 PN 于 T,可得 $\angle CBR=\angle C$,$\angle PBT=\angle RBT$.在 $\triangle BPT$ 和 $\triangle BNT$ 中,因为

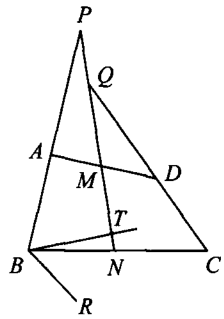

图 5

$\angle BTP=180^\circ-(\angle PBT+\angle BPT)$,

$$\begin{aligned}\angle BTN&=180^\circ-(\angle NBT+\angle BNT)\\&=180^\circ-(\angle NBT+\angle C+\angle CQN)\\&=180^\circ-(\angle NBT+\angle CBR+\angle CQN),\end{aligned}$$

所以 $\angle BTP=\angle BTN$.

又 $\angle BTP+\angle BTN=180^\circ$,

所以 $\angle BTP=\angle BTN=90^\circ$.

因为 $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}=-(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC})=-(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BR})$,

又 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|=|\overrightarrow{BR}|$,

所以 $(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BR})$ 与 $\overrightarrow{BT}$ 共线.

因为 $\angle BTP=\angle BTN=90^\circ$,

所以 $\overrightarrow{PQ}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC})=0$.

2.4 特殊化法思路及反思

(1)思路

教学中,有学生提出了一种特殊化的方法.如图 6,取 $ABCD$ 为等腰梯形,此时 $\overrightarrow{PQ}=\mathbf{0}$.则有 $\overrightarrow{PQ}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC})=0$.这是一种极致的特殊化法思路,

题中明确要求 P、Q 是不同的两点，因此上述特殊化法是不合题意的.

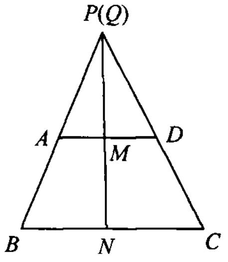

图 6

(2)反思

错误的思路有时也有可以汲取营养的地方，有时也有反思讨论的价值. 上述特殊化法虽然不合题意，但如此特殊化得出正确的答案是偶然的还是必然的呢？是否具有合理性呢？现在已经证得“$\angle BPN=\angle CQN$”，那么上述特殊化也是合理的，极致特殊化的图形其实就是后文实验操作的起始图形，亦可以看作是极限位置，得到正确答案是必然的.

3 数学实验与追根

教学中，由“$\angle BPN=\angle CQN$”的发现，可以追溯本题题图的来源. 引导学生开展以下实验操作得到.

①如图 7，取两个相等的角 $\angle UPV$，$\angle XQY$ 的纸片，让 $\angle UPV$ 的顶点 P 与 $\angle XQY$ 的顶点 Q 重合，$\angle UPV$ 的边 PV 和 $\angle XQY$ 的边 QX 重合；

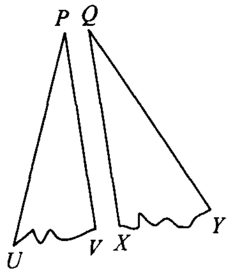

图 7

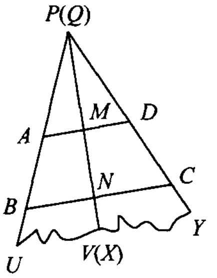

图 8

②如图 8，在 PU，PY 上分别取 A、B，D、C，使得 $PA=PD$，$AB=DC$，连接 AD，BC 分别交 PX 于 M、N. 再沿着边 PV 向下移动 $\angle XQY$，在 PU 与 QY 上分别截取 $PA=QD$，$PB=QC$，连接 AD 交 PV 于 M，连接 BC 交 PV 于 N，此时就得到图 9 的一般情况.

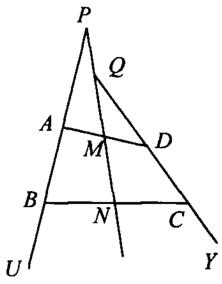

图 9

由上面的操作可以知道：只要 $\angle BPN=\angle CQN$，$PA=QD$，$AB=DC$，就应有 M、N 是 AD、BC 的中点. 反之，$AB=DC$，M、N 是 AD、BC 的中点，一定有 $\angle BPN=\angle CQN$，$PA=QD$.

4 教后的思考

《普通高中数学课程标准(2017 年版)》指出：“向量是描述直线、曲线、平面以及高维空间数学问题的基本工具，是进一步学习和研究其他数学领域问题的基础，在解决实际问题中发挥重要作用.”[1]可见，向量的学习对高中生数学素养发展的意义重大. 教学中，应引导学生理解在高中数学中解决向量问题的主要方法基底法和坐标法，基底法和坐标法的共同本质在于把图形关系转化成代数关系，利用代数运算去解决问题，实现数与形的转化. 其实，坐标法是基底法的特殊化，就是单位正交基底法，而用坐标来处理之后的几何问题在求解过程中，特别是在求某个点的坐标时，大多情况下会更加方便自然，可操作性强. 平面几何的方法在解决一些关于平面向量问题时，可以另辟蹊径，也能很方便解决地解决问题，甚至有意想不到的收获. 当然，平面几何的方法对解决向量问题时更多地是起到辅助的作用，绝不能喧宾夺主，过分强调其作用.

本题的上述几种思路将一个几何图形分别置于向量几何、解析几何、平面几何等不同情境，有利于帮助我们理解数学知识之间的联系，完善内在的认知结构，形成更丰富的基本活动经验. 在实际教学中可以引领指导学生对不同思路进行差异分析，帮助学生化解在解题中遇到的困难，要让学生真正理解这道习题的几何本质，了解此习题的背景，深刻领悟此题反映的思想方法和教学价值. 此习题本质其实是两个等角在运动的过程定量问题——$\overrightarrow{PQ}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC})$的值一直保持不变. 将之放置在向量几何的情境中，通过学生的学习掌握向量中的基底法和坐标法，更能体验平面向量实现几何问题代数化的重要功能. 通过该向量问题的分析和探究，从不同的角度来思考解决，加深了对数学学科的理解和对数学知识背后价值的挖掘，定然会激发学生的求知欲，利于学生直观想象、逻辑推理、数学运算等数学核心素养的培养，让数学核心素养培养在习题教学中落地生根.

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版)[M]. 北京：人民教育出版社，2018