

1. 某公司对项目 A 进行生产投资, 所获得的利润有如下统计数据表:

项目 A 投资金额 x (单位: 百万元)	1	2	3	4	5
所获利润 y (单位: 百万元)	0.3	0.3	0.5	0.9	1

(1) 请用线性回归模型拟合 y 与 x 的关系, 并用相关系数加以说明;

(2) 该公司计划用 7 百万元对 A, B 两个项目进行投资. 若公司对项目 B 投资 $x (1 \leq x \leq 6)$

百万元所获得的利润 y 近似满足: $y = 0.16x - \frac{0.49}{x+1} + 0.49$, 求 A, B 两个项目投资金额分别为多少时, 获得的总利润最大?

附: ①对于一组数据 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, 其回归直线方程 $\hat{y} = bx + \hat{a}$ 的

斜率和截距的最小二乘法估计公式分别为: $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}$, $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$.

②线性相关系数 $r = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2)(\sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2)}}$. 一般地, 相关系数 r 的绝对值在 0.95 以上 (含 0.95) 认为线性相关性较强; 否则, 线性相关性较弱.

参考数据: 对项目 A 投资的统计数据表中 $\sum_{i=1}^n x_i y_i = 11$, $\sum_{i=1}^n y_i^2 = 2.24$, $\sqrt{4.4} \approx 2.1$.

答案和解析

1. 【答案】C

【解析】解：因为 $iz = 4 - 3i$,

$$\text{所以 } z = \frac{4-3i}{i} = -3 - 4i,$$

其对应的点 $(-3, -4)$ 在第三象限.

故选：C.

把已知的等式变形，然后利用复数代数形式的乘除运算化简，求出 z 对应点的坐标得答案.

本题考查了复数的代数表示法及其几何意义，是基础题.

2. 【答案】C

【解析】解：集合 A, B 是全集 U 的两个子集，由 $A \cap B = \emptyset$ ，能够推出 $A \subseteq \complement_U B$ ，

由 $A \subseteq \complement_U B$ ，能够推出 $A \cap B = \emptyset$ ，

故集合 A, B 是全集 U 的两个子集，则 “ $A \cap B = \emptyset$ ” 是 “ $A \subseteq \complement_U B$ ” 的充要条件，

故选：C.

根据集合的运算和定义，利用充分条件和必要条件的定义进行判断即可.

本题考查了充要条件的判定、集合的运算以及子集的定义，属于基础题.

3. 【答案】B

【解析】解： $\because \bar{x} = \frac{1+3+5+7}{4} = 4$,

$$\bar{y} = \frac{0.5+a+2+2.5}{4} = \frac{a+5}{4},$$

$\therefore$ 这组数据的样本中心点是 $(4, \frac{5+a}{4})$,

$$\because \hat{y} = 0.36x + 0.01,$$

把样本中心点代入得， $\frac{5+a}{4} = 0.36 \times 4 + 0.01$,

可得 $a = 0.8$.

故选：B.

先求出 x 和 y 的平均数，写出样本中心点，根据所给的 b 的值，写出线性回归方程，把样本中心点代入求出 a 的值.

本题考查线性回归方程的应用，回归直线的性质，本题是一个基础题.

4. 【答案】A

【解析】解：根据题意，分 2 种情况讨论：

- ①小明和小李两人去一个植树点，剩下 3 人去另一个植树点，有 $C_2^1 = 2$ 种分配方案，
②小明和小李还有另外 1 人去一个植树点，剩下 2 人去另一个植树点，有 $C_3^1 C_2^1 = 6$ 种分配方案，

则一共有 $2 + 6 = 8$ 种分配方案；

故选：A.

根据题意，分 2 种情况讨论：①小明和小李两人去一个植树点，剩下 3 人去另一个植树点，②小明和小李还有另外 1 人去一个植树点，剩下 2 人去另一个植树点，由加法原理计算可得答案.

本题考查排列组合的应用，涉及分类计数原理的应用，属于基础题.

5. 【答案】C

【解析】解： $\frac{2\cos 10^\circ - \sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{2\cos(30^\circ - 20^\circ) - \sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{\sqrt{3}\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ} = \sqrt{3},$

故选：C.

将 10° 拆成 $30^\circ - 20^\circ$ 利用差角的余弦求解即可.

本题主要考查两角差的余弦公式的运用，正确记住公式是关键，属于基础题.

6. 【答案】D

【解析】解：记 $N = 2^{2^{10}},$

$$\because 2^{10} = 1024,$$

$$\therefore \lg N = \lg 2^{1024} = 1024 \lg 2 \approx 1024 \times 0.3010 = 308.224,$$

$$\therefore N = 10^{308.224} \in (10^{308}, 10^{309}),$$

$\because 10^{308}$ 是一个 309 位数，

10^{309} 是最小的 310 位数，且 N 为整数，

$\therefore 2^{2^{10}}$ 的位数 309.

故选：D.

记 $N = 2^{2^{10}}, 2^{10} = 1024,$ 从而 $\lg N = \lg 2^{1024} = 1024 \lg 2 \approx 308.224,$ 从而 $N =$

$10^{308.224} \in (10^{308}, 10^{309}),$ 由此能求出 $2^{2^{10}}$ 的位数.

本题考查对数的运算，考查对数的性质、运算法则等基础知识，考查运算求解能力等数学核心素养，是基础题.

7. 【答案】A

【解析】

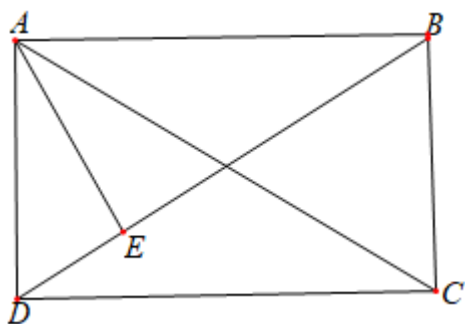
【分析】

本题主要考查向量数量积及其几何意义，涉及到利用基本不等式求最值，是一道中档题.

设 $\angle CAB = \theta$ ，将 $(\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE}) \cdot (\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA})$ 用 θ 表示，再利用基本不等式即可得到最大值.

【解答】

解：



如图，设 $\angle CAB = \theta$ ， $\theta \in (0^\circ, 90^\circ)$ ，则由 $AC = 1$ ， $AE \perp BD$ ，得 $AB = \cos\theta$ ， $AD = \sin\theta$ ，

$AE = \sin\theta \cos\theta$ ，

所以 $(\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE}) \cdot (\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA}) = (\sin\theta \cos\theta)^2 \sin^2\theta$

$$= \frac{1}{2} \sin^2\theta \times 2 \cos^2\theta \times \sin^2\theta$$

$$\leq \frac{1}{2} \left(\frac{\sin^2\theta + 2\cos^2\theta + \sin^2\theta}{3} \right)^3 = \frac{4}{27},$$

当且仅当 $\sin^2\theta = 2\cos^2\theta$ ，即 $\tan\theta = \sqrt{2}$ 时，等号成立.

故选：A.

8. 【答案】B

【解析】解：令 $g(x) = f(x)\ln x$ ，则 $g'(x) = f'(x)\ln x + \frac{f(x)}{x} > 0$ ，

$\therefore g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 时单调递增，又 $g(1) = f(1)\ln 1 = 0$ ，

$\therefore x \in (0, 1)$ 时， $g(x) < 0$ ， $x \in (1, +\infty)$ 时， $g(x) > 0$ ，

当 $x \in (0, 1)$ 时， $\ln x < 0$ ， $g(x) < 0$ ， $\therefore f(x) > 0$ ，

$x \in (1, +\infty)$ 时， $\ln x > 0$ ， $g(x) > 0$ ， $\therefore f(x) > 0$ ，

$\therefore f(x) > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立，

又 $f(x)$ 是奇函数， $f(0) = 0$ ，

$\therefore f(x) < 0$ 在 $(-\infty, 0)$ 上恒成立，

①当 $x > 0$ 时， $f(x) > 0$ ， $\therefore x^2 - 1 < 0$ ，即 $0 < x < 1$ ，

②当 $x < 0$ 时, $f(x) < 0$, $\therefore x^2 - 1 > 0$, 即 $x < -1$,

由①②得不等式的解集是 $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$,

故选: B.

令 $g(x) = f(x)\ln x$, 根据函数的单调性和奇偶性求出不等式的解集即可.

本题考查了函数的单调性, 奇偶性问题, 考查导数的应用以及函数恒成立问题, 是中档题.

9. 【答案】ACD

【解析】解: 设等比数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的公比分别为 p , q .

A. $\frac{a_{n+1}b_{n+1}}{a_nb_n} = pq$, $\therefore$ 数列 $\{a_nb_n\}$ 是公比为 pq 的等比数列, 正确;

B. 数列 $\{a_n + b_n\}$ 不一定是等比数列, 例如取数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 分别为: $a_n = 2^n$, $b_n = -2^n$;

C. $\therefore \lg \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} - \lg \frac{b_n}{a_n} = \lg \frac{b_{n+1}}{b_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lg \frac{q}{p}$ 为一常数, $\therefore$ 数列 $\{\lg \frac{b_n}{a_n}\}$ 是等差数列, 正确;

D. $\therefore \lg(a_{n+1}^2 b_{n+1}^2) - \lg(a_n^2 b_n^2) = \lg(\frac{a_{n+1}}{a_n})^2 (\frac{b_{n+1}}{b_n})^2 = \lg(p^2 q^2)$ 为一常数, $\therefore$ 数列 $\{\lg \frac{b_n}{a_n}\}$ 是等差数列, 正确;

故选: ACD.

利用等差数列与等比数列的定义通项公式及其对数的运算性质即可判断出正误.

本题考查了等差数列与等比数列的定义通项公式及其对数的运算性质, 考查了推理能力与计算能力, 属于基础题.

10. 【答案】BCD

【解析】解: A 中, 方程 $\frac{x^2}{16+k} - \frac{y^2}{9-k} = 1 (k \in \mathbb{R})$, $16+k \neq k-9$, 所以方程不表示圆的方程, 故 A 不正确;

B 中, 当 $k > 9$ 时, 方程 $\frac{x^2}{16+k} - \frac{y^2}{9-k} = 1$, 因为 $16+k > 9-k$, 所以方程表示焦点在 x 轴上的椭圆,

故 B 正确;

C 中, 当 $-16 < k < 9$ 时, 方程 $\frac{x^2}{16+k} - \frac{y^2}{9-k} = 1$ 中, $16+k > 0$, $9-k > 0$, 方程表示焦点在 x 轴上的双曲线, 所以 C 正确;

D 中, 当方程 $\frac{x^2}{16+k} - \frac{y^2}{9-k} = 1$ 表示椭圆或双曲线时, 焦距均为 10, 所以 D 正确;

故选: BCD.

分别将 k 的值代入各个命题，可判断出命题的真假，或者判断出充分必要，进而选出结果.

本题考查圆锥曲线，圆与方程以及充分条件必要条件的判断，属于中档题.

11. 【答案】AD

【解析】解：∵函数 $f(x) = 2\sin 2x$, $g(x) = -2\cos 2x = \sin(2x - \frac{\pi}{2})$,

故将 $y = f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度后可得到 $y = g(x)$ 的图象，故 A 正确；

由题意， $y = f(x) + g(x) = 2\sin 2x - \cos 2x = 2\sqrt{2}\sin(2x - \frac{\pi}{4})$,

$y = f(x) - g(x) = 2\sin 2x + \cos 2x = 2\sqrt{2}\sin(2x + \frac{\pi}{4})$,

故将 $y = f(x) + g(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度后可得到 $y = 2\sqrt{2}\sin(2x - \frac{3\pi}{4})$ 的图象，

故 B 错误；

由于 $f(\frac{\pi}{4} - x) = 2\sqrt{2}\sin(-2x + \frac{\pi}{4}) \neq g(x)$ ，故 C 错误；

当 $x = \frac{\pi}{4}$ 时， $y = f(x) + g(x) = 2\sqrt{2}\sin(2x - \frac{\pi}{4}) = 2$ ， $y = f(x) - g(x) = 2\sqrt{2} = 2$ ，

故它们的关于直线 $x = \frac{\pi}{4}$ 对称，故 D 正确，

故选：AD.

由题意利用函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象变换规律，正弦函数的图象和性质，得出结论.

本题主要考查函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象变换规律，正弦函数的图象和性质，属于中档题.

12. 【答案】ABD

【解析】解：函数 $f(x) = \sqrt{|\sin x|} + \sqrt{|\cos x|}$,

对于 A：满足 $f(\frac{\pi}{2} + x) = f(x)$ 所以 $\frac{\pi}{2}$ 为周期函数的周期，故 A 正确；

对于 B：函数满足 $f(\frac{\pi}{2} - x) = f(x)$ ，所以函数关于 $x = \frac{\pi}{4}$ 对称，故函数的图像必有对称轴，

故正确；

对于 C：由 A 知，函数的周期为 $\frac{\pi}{2}$ ，所以：对于 C 中的关系，当 $k = 0$ 时，函数的单调递增区间为 $[0, \frac{\pi}{2}]$ ，显然错误，故 C 错误；

对于 D：当 $x = 0$ 时， $f(0) = 1 = f(\frac{\pi}{2})$ ，当 $x = \frac{\pi}{4}$ 时， $f(\frac{\pi}{4}) = 8^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{8}$ ，故 D 正确.

故选：ABD.

直接利用三角函数关系式的性质和应用判断 A 、 B 、 C 、 D 的结论.

本题考查的知识要点: 三角函数的关系式的应用, 三角函数的性质的应用, 主要考查学生的运算能力和数学思维能力, 属于基础题.

13. 【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{3}$

【解析】解: 因为 $\tan \angle CBD = 7$, 所以 $\sin \angle CBD = \frac{7}{\sqrt{50}}$, $\cos \angle CBD = \frac{1}{\sqrt{50}}$,

$$\text{又 } \angle ABD = \frac{\pi}{4},$$

$$\text{所以 } \sin \angle ABC = \sin(\angle CBD + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin \angle CBD + \cos \angle CBD) = \frac{4}{5},$$

$$\text{又 } S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BDC},$$

$$\text{所以 } \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \frac{4}{5} = \frac{1}{2} \times 1 \times BD \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \times 1 \times BD \times \frac{7}{\sqrt{50}},$$

$$\text{解得 } BD = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

由 $\tan \angle CBD$ 得到 $\sin \angle CBD$ 及 $\cos \angle CBD$, 利用两角和的正弦公式得到 $\sin \angle ABC$, 再由

$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BDC}$ 运算即可得到答案.

本题主要考查三角形中的几何计算问题, 涉及到三角形面积公式、两角和的正弦公式的应用, 是一道中档题.

14. 【答案】3

【解析】解: 抛物线 $C_1: y^2 = -2px (p > 0)$ 的准线为 $x = \frac{p}{2}$,

$$\text{由题意可得 } \frac{p}{2} = \frac{a^2}{c},$$

$$\text{由 } \begin{cases} x = -\frac{p}{2} \\ y^2 = -2px \end{cases} \text{ 可设 } P(-\frac{p}{2}, p), Q(-\frac{p}{2}, -p),$$

$$\text{则 } |PQ| = 2p,$$

$$\text{由题意可得 } a + \frac{a^2}{c} = a + \frac{p}{2} = 2p,$$

$$\text{即有 } a = \frac{3}{2}p,$$

$$c = \frac{9}{2}p,$$

$$\text{则 } e = \frac{c}{a} = 3.$$

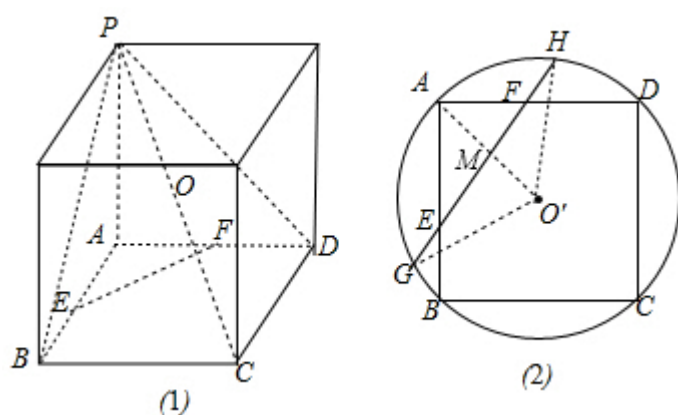
故答案为: 3.

求得抛物线的准线方程，可得 $\frac{p}{2} = \frac{a^2}{c}$ ，联立双曲线的左准线方程和抛物线的方程，求得 P, Q 的坐标和 $|PQ|$ ，可得 $a + \frac{a^2}{c} = a + \frac{p}{2} = 2p$ ，解得 a, c (用 p 表示)，再由离心率公式，计算可得所求值。

本题考查抛物线和双曲线的方程和性质，以及直线和圆锥曲线的位置关系，考查方程思想和运算能力，属于中档题。

15. 【答案】 $\sqrt{6}$

【解析】解：把四棱锥 $P-ABCD$ 还原出一个棱长为2的正方体，则该正方体与四棱锥的外接球相同，如图所示：



设外接球的球心为 O ，则 O 也是正方体的中心，

所以过平面 $ABCD$ 的截面圆是正方形 $ABCD$ 的外接圆，且外接圆直径为 $2\sqrt{2}$ ，半径为 $\sqrt{2}$ ，

直线 EF 被外接圆所截得的弦长 GH 即为所求，

连接 AO' ，交 EF 于点 M ，则 $AM = \frac{1}{2}EF = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

所以 $O'M = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ， $GH = 2MH = 2 \times \sqrt{3}O'M = 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{6}$ ，

即直线 EF 被四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球所截得的线段长为 $\sqrt{6}$ 。

故答案为： $\sqrt{6}$ 。

把四棱锥 $P-ABCD$ 还原出一个棱长为2的正方体，该正方体与四棱锥的外接球相同，过平面 $ABCD$ 的截面圆是正方形 $ABCD$ 的外接圆，由此求出直线 EF 被外接圆所截得的弦长即可。

本题主要考查求几何体的外接球应用问题，也考查了四棱锥的结构特征应用问题，是中档题。

16. 【答案】 $\frac{3}{4} 2$

【解析】解： $f'(x) = 3x^2 + 1$ ，设切点为 $(x_n, x_n^3 + x_n + 1)$ ，

则切线斜率 $k = 3x_n^2 + 1$ ，

所以切线方程为 $y = (3x_n^2 + 1)(x - x_n) + x_n^3 + x_n + 1$ ，

令 $y = 0$ ，可得 $x_{n+1} = -\frac{x_n^3 + x_n - 1}{3x_n^2 + 1} + x_n = \frac{2x_n^3 + 1}{3x_n^2 + 1}$ ，

因为 $x_0 = 0$ ，所以 $x_1 = 1$ ， $x_2 = \frac{3}{4}$ ，

即 r 的 2 次近似值为 $\frac{3}{4}$ ，

因为 $x_{n+1} = \frac{2x_n^3 + 1}{3x_n^2 + 1}$ ，

所以 $\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{3x_n^3 + x_n}{2x_n^3 + 1} = a_n$ ，

所以 $T_n = a_1 a_2 \dots a_n = \frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{x_2}{x_3} \cdot \dots \cdot \frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{x_1}{x_{n+1}} = \frac{1}{x_{n+1}}$ ，

因为函数 $f(x) = x^3 + x - 1 (x \geq 0)$ 为增函数，

$f(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{8} < 0$ ， $f(1) = 1 > 0$ ，

由零点存在定理可得 $r \in (\frac{1}{2}, 1)$ ，

所以 $\frac{1}{x_{n+1}} \rightarrow \frac{1}{r} \in (1, 2)$ ，

因为任意 $n \in N^*$ ， $T_n < \lambda$ 恒成立，

所以 $\lambda \geq 2$ ，即 λ 的最小整数为 2。

故答案为： $\frac{3}{4}$ ； 2。

对 $f(x)$ 求导，利用导数的几何意义可得在点 $(x_n, x_n^3 + x_n + 1)$ 出的切线方程，令 $y = 0$ ，

可得 r 的 $n + 1$ 次近似值与 r 的 n 次近似值的关系式，由 $x_0 = 0$ ，依次计算即可求得 r 的

2 次近似值，计算可得 $\frac{x_n}{x_{n+1}} = a_n$ ，由累积法可求得 $T_n = \frac{1}{x_{n+1}}$ ，由零点存在定理求得 r 的

取值范围，从而可求得整数 λ 的最小值。

本题主要考查导数的几何意义，数列的求和，零点存在定理的应用，考查了推理能力与计算能力，属于中档题。

17. 【答案】解：选①A，C，B 成等差数列，

因为 $A + B + C = \pi$ 且 $A + B = 2C$ ，

所以 $C = 60^\circ$ ， $B = 120^\circ - A$ ，

因为 $5\sin A = 3\sin B = 3\sin(120^\circ - A) = \frac{3\sqrt{3}}{2}\cos A + \frac{3}{2}\sin A$ ，

整理得 $7\sin A = 3\sqrt{3}\cos A$ ，

因为 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ 且 $\sin A > 0$ ， $\cos A > 0$ ，

$$\text{所以} \sin A = \frac{3\sqrt{57}}{38};$$

选② a, b, c 成等差数列, $2b = a + c$,

因为 $5\sin A = 3\sin B$,

由正弦定理得 $5a = 3b$,

$$\text{故} b = \frac{5}{3}a, c = \frac{7}{3}a,$$

$$\text{由余弦定理得} \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{\frac{25a^2}{9} + \frac{49a^2}{9} - a^2}{2 \times \frac{5a}{3} \times \frac{7a}{3}} = \frac{13}{14}, \text{ 因为 } A \in (0, \pi),$$

$$\text{所以} \sin A = \frac{3\sqrt{3}}{14};$$

$$\text{选③} \sin A = \cos C = \sin(\frac{\pi}{2} - C),$$

$$\text{所以} A = \frac{\pi}{2} - C \text{ 或 } A + \frac{\pi}{2} - C = \pi,$$

$$\text{即} A + C = \frac{\pi}{2} \text{ 或 } A - C = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{若} A + C = \frac{\pi}{2}, B = \frac{\pi}{2} \text{ 则 } \sin B = 1,$$

$$\text{因为} 5\sin A = 3\sin B = 3,$$

$$\text{所以} \sin A = \frac{3}{5},$$

$$\text{若} A = C + \frac{\pi}{2}, \text{ 则 } B = \pi - A - C = \frac{3\pi}{2} - 2A,$$

$$\text{因为} 5\sin A = 3\sin B = 3\sin(\frac{3\pi}{2} - 2A) = -3\cos 2A = -3(1 - 2\sin^2 A),$$

$$\text{整理得} 6\sin^2 A - 5\sin A - 3 = 0,$$

$$\text{解得} \sin A = \frac{5 - \sqrt{97}}{12} < 0 (\text{舍}) \text{ 或 } \sin A = \frac{5 + \sqrt{97}}{12} > 1 (\text{舍}), \text{ 此时不存在.}$$

【解析】 选① A, C, B 成等差数列可得 $B = 120^\circ - A$, 然后结合 $5\sin A = 3\sin B = 3\sin(120^\circ - A)$, 然后结合差角正弦公式展开即可求解;

选② a, b, c 成等差数列, $2b = a + c$, 由 $\sin A = 3\sin B$, 结合正弦定理及余弦定理可求;

选③ $\sin A = \cos C = \sin(\frac{\pi}{2} - C)$, 进而可得 A, C 的关系, 然后结合 $5\sin A = 3\sin B$ 及和差角公式展开可求.

本题主要考查了正弦定理, 余弦定理, 同角平方关系在求解三角形中的应用, 属于中档题.

$$18. \text{【答案】解: (1) 因为 } S_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n,$$

所以当 $n = 1$ 时, $a_1 = S_1 = 1$;

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - [\frac{1}{2}(n-1)^2 + \frac{1}{2}(n-1)] = n$,

又 $n = 1$ 时符合上式, 所以 $a_n = n, n \in N^*$;

(2) 因为 $b_n = \begin{cases} a_n, n = 2k-1, k \in N^* \\ 2^{a_n}, n = 2k, k \in N^* \end{cases}$.

所以对任意的 $k \in N^*$, $b_{2k+1} - b_{2k-1} = (2k+1) - (2k-1) = 2$,

则 $\{b_{2k+1}\}$ 是以 1 为首项, 2 为公差的等差数列;

$\frac{b_{2k+2}}{b_{2k}} = \frac{2^{2k+2}}{2^{2k}} = 4$, 则 $\{b_{2k}\}$ 是以 4 为首项, 4 为公比的等比数列.

所以 $T_{2n} = (b_1 + b_3 + b_5 + \cdots + b_{2n-1}) + (b_2 + b_4 + b_6 + \cdots + b_{2n})$

$$= (1 + 3 + \cdots + 2n - 1) + (2^2 + 2^4 + 2^6 + \cdots + 2^{2n})$$

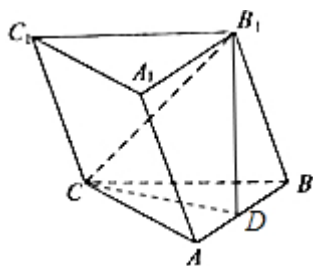
$$= \frac{n(1+2n-1)}{2} + \frac{4(1-4^n)}{1-4} = n^2 + \frac{4^{n+1}}{3} - \frac{4}{3}.$$

【解析】 本题考查数列的通项公式的求解问题, 考查等差数列、等比数列的判定以及数列的求和问题, 属于中档题.

(1) 根据数列的前 n 项和与其通项公式的关系, 即可求出结果;

(2) 由题意可判定数列 $\{b_n\}$ 的奇数项构成等差数列, 偶数项构成等比数列, 根据等差数列、等比数列的前 n 项和公式即可求解.

19. 【答案】 (1) 证明: 取 AB 中点 D , 连接 CD, B_1D .



因为三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的所有棱长都为 2, 所以 $AB \perp CD$, $CD = \sqrt{3}$, $BD = 1$.

又因为 $AB \perp B_1C$, 且 $CD \cap B_1C = C$, $CD, B_1C \subset$ 平面 B_1CD ,

所以 $AB \perp$ 平面 B_1CD .

又因为 $B_1D \subset$ 平面 B_1CD , 所以 $AB \perp B_1D$.(2分)

在直角三角形 B_1BD 中, $BD = 1$, $B_1B = 2$, 所以 $B_1D = \sqrt{3}$.

在三角形 B_1CD 中, $CD = \sqrt{3}$, $B_1D = \sqrt{3}$, $B_1C = \sqrt{6}$,

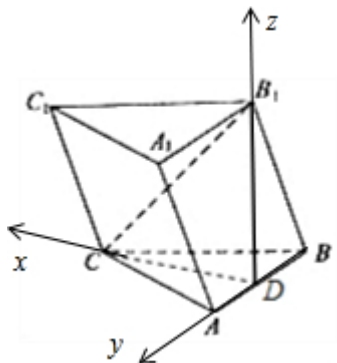
所以 $CD^2 + B_1D^2 = B_1C^2$,

所以 $CD \perp B_1D$.(4分)

又因为 $AB \perp B_1D$, $AB \cap CD = D$, $AB, CD \subset$ 平面 ABC , 所以 $B_1D \perp$ 平面 ABC .

又因为 $B_1D \subset$ 平面 ABB_1A_1 , 所以平面 $ABB_1A_1 \perp$ 平面 ABC . (6分)

(2)解: 以 DC, DA, DB_1 所在直线为 x, y, z 轴建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $A(0,1,0)$, $B(0,-1,0)$, $C(\sqrt{3},0,0)$, $B_1(0,0,\sqrt{3})$,

因此 $\overrightarrow{BB_1} = (0,1,\sqrt{3})$, $\overrightarrow{AC} = (\sqrt{3},-1,0)$, $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1} = (0,1,\sqrt{3})$.

因为点 P 在棱 BB_1 上, 则设 $\overrightarrow{BP} = \lambda \overrightarrow{BB_1} = \lambda(0,1,\sqrt{3})$, 其中 $0 \leq \lambda \leq 1$.

则 $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{CB} + \lambda \overrightarrow{BB_1} = (-\sqrt{3}, -1 + \lambda, \sqrt{3}\lambda)$. (8分)

设平面 ACC_1A_1 的法向量为 $\vec{n} = (x,y,z)$,

$$\text{由} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0, \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AA_1} = 0, \end{cases} \text{得} \begin{cases} \sqrt{3}x - y = 0, \\ y + \sqrt{3}z = 0 \end{cases}$$

取 $x = 1$, $y = \sqrt{3}$, $z = -1$,

所以平面 ACC_1A_1 的一个法向量为 $\vec{n} = (1, \sqrt{3}, -1)$ (10分)

因为直线 CP 与平面 ACC_1A_1 所成角的正弦值为 $\frac{4}{5}$,

$$\text{所以} \cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{CP} \rangle = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{CP}}{|\vec{n}| |\overrightarrow{CP}|} = \frac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{5} \times \sqrt{3 + (\lambda-1)^2 + 3\lambda^2}} = -\frac{4}{5},$$

化简得 $16\lambda^2 - 8\lambda + 1 = 0$, 解得 $\lambda = \frac{1}{4}$,

所以 $BP = \lambda BB_1 = \frac{1}{2}$. (12分)

【解析】(1)取 AB 中点 D , 连接 CD, B_1D . 证明 $AB \perp CD, AB \perp B_1C$, 推出 $AB \perp$ 平面 B_1CD , 即可证明 $AB \perp B_1D$. 然后证明 $CD \perp B_1D$, 推出 $B_1D \perp$ 平面 ABC . 即可证明平面 $ABB_1A_1 \perp$ 平面 ABC .

(2)以 DC, DA, DB_1 所在直线为 x, y, z 轴建立如图所示的空间直角坐标系, 求出平面 ACC_1A_1 的法向量, 通过直线 CP 与平面 ACC_1A_1 所成角的正弦值为 $\frac{4}{5}$, 求解 λ 然后得到结果.

本题考查直线与平面垂直的判断定理的应用, 直线与平面所成角的求法, 考查空间想象能力, 转化思想以及计算能力, 是中档题.

20.【答案】解：(1)对项目 A 投资的统计数据计算，有 $\bar{x} = 3, \bar{y} = 0.6, \sum_{i=1}^n x_i^2 = 55$.

$$\therefore \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2} = \frac{11 - 5 \times 3 \times 0.6}{55 - 5 \times 3^2} = 0.2, \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 0.6 - 0.2 \times 3 = 0,$$

$\therefore$ 回归直线方程为: $\hat{y} = 0.2x$;

$$\begin{aligned} \text{线性相关系数 } r &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2)(\sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2)}} \\ &= \frac{11 - 5 \times 3 \times 0.6}{\sqrt{(55 - 5 \times 3^2)(2.24 - 5 \times 0.6^2)}} = \frac{2}{\sqrt{4.4}} \approx 0.9524 > 0.95, \end{aligned}$$

这说明投资金额 x 与所获利润 y 之间的线性相关关系较强，用线性回归方程 $\hat{y} = 0.2x$ 对该组数据进行拟合合理；

(2) 设对 B 项目投资 $x(1 \leq x \leq 6)$ 百万元，则对 A 项目投资 $(7 - x)$ 百万元.

$$\text{所获总利润 } y = 0.16x - \frac{0.49}{x+1} + 0.49 + 0.2(7 - x)$$

$$= 1.93 - [0.04(x + 1) + \frac{0.49}{x+1}] \leq 1.93 - 2\sqrt{0.04(x + 1) \times \frac{0.49}{x+1}} = 1.65,$$

当且仅当 $0.04(x + 1) = \frac{0.49}{x+1}$ ，即 $x = 2.5$ 时取等号，

$\therefore$ 对 A, B 项目分别投资 4.5 百万元，2.5 百万元时，获得总利润最大.

【解析】(1) 由已知数据求得 $\hat{b}$ 与 $\hat{a}$ 的值，可得 y 关于 x 的线性回归方程，求出线性相关系数 r 的值，与 0.95 比较大小得出结论；

(2) 设对 B 项目投资 $x(1 \leq x \leq 6)$ 百万元，则对 A 项目投资 $(7 - x)$ 百万元，写出所获总利润，然后利用基本不等式求最值.

本题考查线性回归方程的求法，考查运算求解能力，是中档题.

21.【答案】解：(1) 因为椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，两条准线之间的距离为 $\frac{8\sqrt{3}}{3}$,

$$\text{所以 } \begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2 \cdot \frac{a^2}{c} = \frac{8\sqrt{3}}{3} \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases}, \text{ 解得 } a^2 = 4, b^2 = 1,$$

所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) 点 $B(0, 1)$ ，设点 $(-1, -1)$ 为点 P ，右顶点 $A(2, 0)$,

设直线 l 的方程为 $y = k(x + 1) - 1$, $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$,

因为点 M, N 分别位于第一、第三象限，

$$\text{所以 } k_{BP} = \frac{-1-1}{-1} = 2, \quad k_{AP} = \frac{-1}{-1-2} = \frac{1}{3},$$

所以 $\frac{1}{3} < k < 2$,

$$\text{联立} \begin{cases} y = k(x+1) - 1 \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}, \text{ 得 } (1+4k^2)x^2 + (8k^2-8k)x + 4k^2-8k = 0,$$

$$\text{所以 } x_1 + x_2 = -\frac{8k^2-8k}{1+4k^2}, \quad x_1 x_2 = \frac{4k^2-8k}{1+4k^2},$$

$$y_1 + y_2 = k(x_1 + 1) - 1 + k(x_2 + 1) - 1 = k(x_1 + x_2) + 2k - 2$$

$$= k\left(-\frac{8k^2-8k}{1+4k^2}\right) + 2k - 2 = \frac{2k-2}{1+4k^2},$$

$$y_1 y_2 = [k(x_1 + 1) - 1][k(x_2 + 1) - 1]$$

$$= k^2(x_1 + 1)(x_2 + 1) - k(x_1 + 1) - k(x_2 + 1) + 1$$

$$= k^2 x_1 x_2 + k^2(x_1 + x_2) + k^2 - k(x_1 + x_2) - 2k + 1$$

$$= k^2 x_1 x_2 + (k^2 - k)(x_1 + x_2) + k^2 - 2k + 1$$

$$= k^2 \cdot \frac{4k^2-8k}{1+4k^2} + (k^2 - k)\left(-\frac{8k^2-8k}{1+4k^2}\right) + k^2 - 2k + 1$$

$$= \frac{-3k^2-2k+1}{1+4k^2},$$

$$k_1 = k_{BM} = \frac{y_1-1}{x_1}, \quad k_2 = k_{BN} = \frac{y_2-1}{x_2},$$

$$\text{所以 } k_1 \cdot k_2 = k_1 = \frac{y_1-1}{x_1} \cdot \frac{y_2-1}{x_2} = \frac{y_1 y_2 - (y_1 + y_2) + 1}{x_1 x_2}$$

$$= \frac{\frac{-3k^2-2k+1}{1+4k^2} - \frac{2k-2}{1+4k^2} + 1}{\frac{4k^2-8k}{1+4k^2}}$$

$$= \frac{k^2 - 4k + 4}{4k^2 - 8k}$$

$$= \frac{k-2}{4k}$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 - \frac{2}{k}\right), \quad \left(\frac{1}{3} < k < 2\right),$$

$$\text{所以 } -\frac{5}{4} < \frac{1}{4}\left(1 - \frac{2}{k}\right) < 0,$$

$$\text{所以 } k_1 k_2 \text{ 的取值范围为 } \left(-\frac{5}{4}, 0\right).$$

【解析】 (1) 由椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 两条准线之间的距离为 $\frac{8\sqrt{3}}{3}$, 列方程组, 解得 a, b, c , 即可得出答案.

(2) 设点 $(-1, -1)$ 为点 P , 设直线 l 的方程为 $y = k(x+1) - 1$, $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 由点 M, N 分别位于第一、第三象限,

推出 $\frac{1}{3} < k < 2$, 联立直线 l 与椭圆的方程, 结合韦达定理可得 $x_1 + x_2, x_1 x_2, y_1 + y_2,$

$y_1 y_2$, 再计算 $k_1 \cdot k_2$, 即可得出答案.

本题考查椭圆的方程, 直线与椭圆的相交问题, 解题中需要一定的计算能力, 属于中档

题.

22.【答案】解：(1)证明：当 $a = \frac{1}{2}$ 时， $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x\sin x - x - 1$,

$$\text{则 } f'(x) = e^x - \frac{1}{2}(x\cos x + \sin x) - 1,$$

$$f''(x) = e^x + \frac{1}{2}x\sin x - \cos x,$$

因为 $x \in [0, \pi]$,

$$\text{所以 } e^x \geq 1, \frac{1}{2}x\sin x \geq 0,$$

$$\text{因此 } f''(x) \geq 1 - \cos x \geq 0,$$

所以 $f'(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上单调递增,

$$\text{于是 } f'(x) \geq f'(0) = 0,$$

因此 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上单调递增,

$$\text{所以 } f(x) \geq f(0) = 0.$$

(2)由(1)知, 当 $a \leq \frac{1}{2}$ 时, $f(x) \geq e^x - \frac{1}{2}x\sin x - x - 1 \geq 0$, 当且仅当 $x = 0$ 时取等号,

此时函数 $f(x)$ 仅有1个零点,

$$\text{当 } a > \frac{1}{2} \text{ 时, 因为 } f(x) = e^x - ax\sin x - x - 1,$$

$$\text{所以 } f'(x) = e^x - a(x\cos x + \sin x) - 1,$$

$$f''(x) = e^x + a(x\sin x - 2\cos x),$$

当 $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ 时, $f''(x) > 0$, $f'(x)$ 单调递增,

$$\text{当 } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \text{ 时, } f'''(x) = e^x + a(3\sin x + x\cos x),$$

$$\text{因为 } e^x > 0, a(3\sin x + x\cos x) \geq 0,$$

所以 $f'''(x) > 0$, 所以 $f''(x)$ 单调递增,

$$\text{又 } f''(0) = 1 - 2a < 0, f''(\frac{\pi}{2}) = e^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{2}a > 0,$$

因此 $f''(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上存在唯一的零点 x_0 , 且 $x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$.

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $f''(x) < 0$, 所以 $f'(x)$ 单调递减,

当 $x \in (x_0, \frac{\pi}{2})$ 时, $f''(x) > 0$, 所以 $f'(x)$ 单调递增,

$$\text{又 } f'(0) = 0, f'(x_0) < f'(0) = 0, f'(\pi) = e^\pi + a\pi - 1 > 0,$$

因此 $f'(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上存在唯一的零点 x_1 , 且 $x_1 \in (x_0, \pi)$,

当 $x \in (0, x_1)$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 单调递减,

当 $x \in (x_1, \pi)$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 单调递增,

又 $f(0) = 0$, $f(x_1) < f(0) = 0$, $f(\pi) = e^\pi - \pi - 1 > 0$,

所以 $f(x)$ 在 (x_1, π) 上存在唯一零点,

因此 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上有两个零点,

综上, a 的取值范围是 $(\frac{1}{2}, +\infty)$.

【解析】 (1) 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x\sin x - x - 1$, 求导分析单调性, 求出 $f(x)_{\min}$,

证明 $f(x)_{\min} \geq 0$ 即可得出答案.

(2) 由(1)知, 当 $a \leq \frac{1}{2}$ 时, $f(x) \geq 0$, 当且仅当 $x = 0$ 时取等号, 函数 $f(x)$ 仅有 1 个零点,

不合题意, 当 $a > \frac{1}{2}$ 时, 求导分析单调性, 使得 $f(x)$ 有两个零点, 即可得出答案.

本题考查导数的综合应用, 解题中注意分类讨论, 转化思想的应用, 属于中档题.