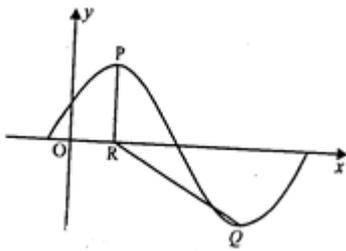


仪征中学 2020 届高三 (上) 数学中档题训练 6 2019.10.24

班级 _____ 学号 _____ 姓名 _____ 成绩 _____

1. 已知角 α 的终边经过点 $P(-x, -6)$, 且 $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, 则 x 的值为 _____.
2. 已知向量 $\vec{a} = (1, m), \vec{b} = (3, -2)$, 且 $(\vec{a} + \vec{b}) \perp \vec{b}$, 则 $m =$ _____.
3. 已知命题 $p: \exists x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x + a \leq 0$ 是真命题, 则实数 a 的取值范围是 _____.
4. 函数 $f(x) = \sin x - \sqrt{3} \cos x (-\pi \leq x \leq 0)$ 的单调增区间是 _____.
5. 在 $\triangle ABC$ 中, $(\vec{AB} - 3\vec{AC}) \cdot \vec{CB} = 0$, 则角 A 的最大值为 _____.
6. 已知函数 $y = x^2 + \frac{a}{x} (a \in \mathbf{R})$ 在 $x = 1$ 处的切线与直线 $2x - y + 1 = 0$ 平行, 则 $a =$ _____.
7. 已知函数 $f(x) = A \sin\left(\frac{\pi}{6} + \varphi\right) \left(A > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示, P, Q 分别为该图象的最高点和最低点, 点 P 的坐标为 $(2, A)$, 点 R 的坐标为 $(2, 0)$. 若 $\angle PRQ = \frac{2\pi}{3}$, 则 $y = f(x)$ 的最大值是 _____.



8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq 0 \\ -x+2, & x \geq 0 \end{cases}$, 则不等式 $f(x) \geq x^2$ 的解集是 _____.
9. 已知正方形 $ABCD$ 的四个顶点在椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上, $AB \parallel x$ 轴, AD 过左焦点 F , 则该椭圆的离心率为 _____.

10. 设实数 x, y 满足 $\begin{cases} x - y - 2 \leq 0 \\ x + 2y - 5 \geq 0 \\ y - 2 \leq 0 \end{cases}$ 则 $u = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$ 的取值范围是 _____.

11 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 $A(\frac{6}{5}, 0), P(\cos \alpha, \sin \alpha)$,

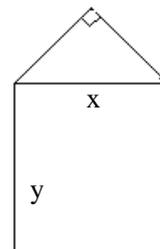
其中 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. (1) 若 $\cos \alpha = \frac{5}{6}$, 求证: $\overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{PQ}$;

(2) 若 $|\overrightarrow{PA}| = |\overrightarrow{PO}|$, 求 $\sin(2\alpha + \frac{\pi}{4})$ 的值.

12. 如图, 某单位用木料制作如图所示的框架, 框架的下部是边长分别为 x, y (单位: 米) 的矩形, 上部是斜边长为 x 的等腰直角三角形, 要求框架围成的总面积为 8 平方米.

(1) 求 x, y 的关系式, 并求 x 的取值范围;

(2) 问 x, y 分别为多少时用料最省?



(第 12 题)

中档题训练 6 答案

1. -8 2. 8 3. $a \leq 1$ 4. $\left[-\frac{\pi}{6}, 0\right]$ 5. $\frac{\pi}{6}$
6. 0 7. $2\sqrt{3}$ 8. $[-1, 1]$ 9. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 10. $\left[-\frac{8}{3}, \frac{3}{2}\right]$

11. 解: (1) (方法一)

由题设知 $\overrightarrow{PA} = \left(\frac{6}{5} - \cos a, -\sin a\right)$, $\overrightarrow{PO} = (-\cos a, -\sin a)$ 2 分

所以 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PO} = \left(\frac{6}{5} - \cos a\right)(-\cos a) + (-\sin a)^2$

$= -\frac{6}{5}\cos a + \cos^2 a + \sin^2 a = -\frac{6}{5}\cos a + 1$ 6 分

因为 $\cos a = \frac{5}{6}$, 所以 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PO} = 0$. 故 $\overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{PO}$ 7 分

(方法二)

因为 $\cos a = \frac{5}{6}$, $0 < a < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\sin a = \frac{\sqrt{11}}{6}$, 故 $P\left(\frac{5}{6}, \frac{\sqrt{11}}{6}\right)$ 2 分

因此 $\overrightarrow{PA} = \left(\frac{11}{30}, -\frac{\sqrt{11}}{6}\right)$, $\overrightarrow{PO} = \left(-\frac{5}{6}, -\frac{\sqrt{11}}{6}\right)$ 4 分

因为 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PO} = \frac{11}{30} \times \left(-\frac{5}{6}\right) + \left(-\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^2 = 0$. 所以 $\overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{PO}$.

(2) 因为 $|\overrightarrow{PA}| \perp |\overrightarrow{PO}|$, 所以 $|\overrightarrow{PA}|^2 = |\overrightarrow{PO}|^2$, 即 $\left(\cos a - \frac{6}{5}\right)^2 + \sin^2 a = \cos^2 a + \sin^2 a$.

解得 $\cos a = \frac{3}{5}$ 9 分 因为 $0 < a < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\sin a = \frac{4}{5}$.

因此 $\sin 2a = 2\sin a \cos a = \frac{24}{25}$, $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = -\frac{7}{25}$ 12 分

从而

$$\sin\left(2a + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2a + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2a = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{24}{25} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(-\frac{7}{25}\right) = \frac{17\sqrt{2}}{50} \text{ 14 分}$$

12. 解: (I) 由题意得: $x \cdot y + \frac{1}{2}x \cdot \frac{x}{2} = 8(x > 0, y > 0)$, 4 分

$$\therefore y = \frac{8}{x} - \frac{x}{4}, \text{ 5 分}$$

$$\because y = \frac{8}{x} - \frac{x}{4} > 0, \therefore 0 < x < 4\sqrt{2}. \text{ 8 分}$$

(II) 设框架用料长度为 l ,

$$\text{则 } l = 2x + 2y + \sqrt{2}x \quad 10 \text{ 分}$$

$$= \left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right)x + \frac{16}{x} \quad 11 \text{ 分}$$

$$\geq 4\sqrt{6 + 4\sqrt{2}} = 8 + 4\sqrt{2}. \quad 13 \text{ 分}$$

$$\text{当且仅当 } \left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right)x = \frac{16}{x}, x = 8 - 4\sqrt{2}, y = 2\sqrt{2}, \text{ 满足 } 0 < x < 4\sqrt{2}. \quad 14 \text{ 分}$$

答: 当 $x = 8 - 4\sqrt{2}$ 米, $y = 2\sqrt{2}$ 米时, 用料最少. 15 分