# 爱恨交加，定值永存

## ——高考中的解几问题

◉ 山东省邹平市第一中学　刘　朋

解析几何的定值问题是历年高考数学命题中的常见题型与热门题型，更是高考中解析几何问题考查的一个重点难点，是备受各方关注的焦点之一. 解析几何的定值问题体现了“动”与“静”、“变”与“定”、变量与定值等之间的和谐统一，有效体现解析几何中相关知识的综合与交汇. 此类问题综合性与趣味性强，背景创新新颖，内容丰富多变，经常把函数、不等式、平面向量等其他知识与解析几何融为一体，充分考查考生的综合能力与应变能力.

### 一、线段长度定值问题

**例1**　(2020年高考数学新高考卷Ⅰ(山东卷)第22题)已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，且过点 $A(2,1)$.

(1) 求 $C$ 的方程；

(2) 点 $M,N$ 在 $C$ 上，且 $AM\perp AN$，$AD\perp MN$，$D$ 为垂足，证明：存在定点 $Q$，使得 $|DQ|$ 为定值.

分析：(1) 根据条件建立关系式来确定相应的参数值，进而求解椭圆的方程；(2) 根据直线 $MN$ 的斜率是否存在加以分类讨论，利用直线与椭圆的方程的联立，通过函数与方程思维的化归与转化，结合韦达定理的转化与应用，借助直线垂直所对应的向量的数量积为0来建立关系式，进而确定参数之间的关系，得以判断直线 $MN$ 过定点，利用直角三角形的性质，斜边中点到直角顶点的距离为斜边长度的一半来确定定值，进而利用中点坐标公式来确定定点即可.

**解析**：(1) 由题意可得 $\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2},\\ \frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1,\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ 解得 $a^2=6$，$b^2=c^2=3$，故椭圆 $C$ 的方程为 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2) 设点 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$.

因为 $AM\perp AN$，则有 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=0$，即 $(x_1-2)(x_2-2)+(y_1-1)(y_2-1)=0$.　①

(ⅰ) 当直线 $MN$ 的斜率存在时，设方程为 $y=kx+m$，如图1，代入椭圆 $C$ 的方程 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$，消去 $y$ 并整理可得 $(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-6=0$，则有 $x_1+x_2=-\frac{4km}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\frac{2m^2-6}{1+2k^2}$.　②

结合 $y_1=kx_1+m$，$y_2=kx_2+m$，代入①并整理可得 $(1+k^2)x_1x_2+(km-k-2)(x_1+x_2)+m^2-2m+5=0$，将②代入，可得 $(1+k^2)\cdot\frac{2m^2-6}{1+2k^2}+(km-k-2)\left(-\frac{4km}{1+2k^2}\right)+m^2-2m+5=0$，整理化简有 $(2k+3m+1)(2k+m-1)=0$，而点 $A(2,1)$ 不在直线 $MN$ 上，则 $2k+m-1\neq0$，可得 $2k+3m+1=0$，于是直线 $MN$ 的方程为 $y=k\left(x-\frac{2}{3}\right)-\frac{1}{3}$，此时 $k\neq1$，所以直线 $MN$ 过定点 $E\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$.

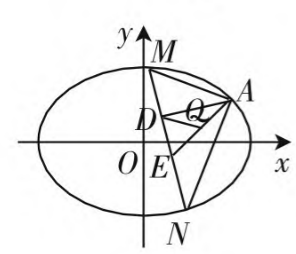

图1

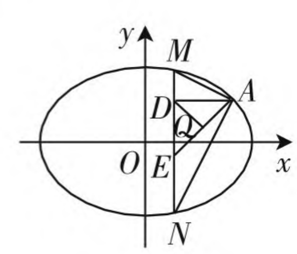

图2

(ⅱ) 当直线 $MN$ 的斜率不存在时，可得 $N(x_1,-y_1)$，如图2，代入①可得 $(x_1-2)^2+1-y_1^2=0$，结合 $\frac{x_1^2}{6}+\frac{y_1^2}{3}=1$，解得 $x_1=2$(舍去)或 $x_1=\frac{2}{3}$，此时直线 $MN$ 也过定点 $E\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$.

由于 $|AE|$ 为定值，且 $\triangle ADE$ 为直角三角形，$AE$ 为斜边，所以线段 $AE$ 的中点 $Q$ 满足 $|DQ|$ 为定值：线



万方数据

段$AE$长度的一半$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\left(2-\frac{2}{3}\right)^2+\left(1+\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，由于$A(2,1)$，$E\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$，故由中点坐标公式可得$Q\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$，故存在定点$Q\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$，使得$|DQ|$为定值.

点评：解决此类解析几何中的线段长度定值问题，一般运算量大，要注意函数与方程、数形结合、分类讨论等思想方法的灵活运用. 在处理涉及解析几何中的线段长度为定值的问题时，可以直接计算推理求出定值，也可以先通过特定位置猜测结论后再进行一般性证明.

## 二、面积定值问题

**例2** 已知$F$是双曲线$C$：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的一个焦点，点$P$在$C$上，$O$为坐标原点. 若$|OP|=|OF|$，试问：$\triangle OPF$的面积是否为定值？如果是，请给予证明；如果不是，请说明理由.

分析：根据双曲线的对称性，取点$P$的其中一个象限的情况加以分析，结合双曲线的定义以及直角三角形的性质建立相应的关系式，再利用三角形的面积公式得以确定定值问题.

**解析**：依题意，设$F$为左焦点，$F_2$为右焦点，由$|OP|=|OF|$，结合对称性，可知点$P$有四个位置，但$\triangle OPF$的面积是一样的，不失一般性，取点$P$在第一象限，由于$|OP|=|OF|=|OF_2|=c$，可得$PF\perp PF_2$. 设$|PF|=m$，$|PF_2|=n$，根据双曲线的定义可得$m-n=2a$，又由于$m^2+n^2=(2c)^2=4c^2$，可得$(m-n)^2+2mn=4c^2$，整理可得$mn=2(c^2-a^2)=2b^2$，所以$\triangle OPF$的面积$S=\frac{1}{2}S_{\triangle PFF_2}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}|PF|\cdot|PF_2|=\frac{1}{4}mn=\frac{1}{4}\times 2b^2=\frac{1}{2}b^2$，为定值.

点评：其实，以上的定值问题就是一道2019年高考真题的结论.

(2019年高考数学全国卷Ⅲ文科第10题)已知$F$是双曲线$C$：$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$的一个焦点，点$P$在$C$上，$O$为坐标原点. 若$|OP|=|OF|$，则$\triangle OPF$的面积为(　　).

A. $\frac{3}{2}$　　B. $\frac{5}{2}$　　C. $\frac{7}{2}$　　D. $\frac{9}{2}$

结合例题中的定值结论可以很快得出答案：$\triangle OPF$的面积$S=\frac{1}{2}b^2=\frac{5}{2}$.

故选B.

## 三、运算关系式定值问题

**例3** (2019年高考数学全国卷Ⅰ文科第21题)已知点$A$，$B$关于坐标原点$O$对称，$|AB|=4$，$\odot M$过点$A$，$B$且与直线$x+2=0$相切.

(1)若$A$在直线$x+y=0$上，求$\odot M$的半径；

(2)是否存在定点$P$，使得当$A$运动时，$|MA|-|MP|$为定值？并说明理由.

分析：设出点$M$的坐标，结合题目条件以及圆的性质，借助勾股定理的转化与应用确定点$M$的轨迹方程，(1)利用点在已知直线上确定点$M$满足的条件，联立方程来求解，进而得以确定圆的半径；(2)利用抛物线的方程并结合其定义与几何性质，通过合理的转化与化归来确定满足条件的定点及对应的定值即可.

**解析**：设$M(x,y)$，结合$\odot M$与直线$x+2=0$相切，可知$\odot M$的半径为$r=|x+2|$. 由$|AB|=4$可得$|AO|=2$，根据圆的性质可得$\overrightarrow{MO}\perp\overrightarrow{AO}$，结合勾股定理有$|\overrightarrow{MO}|^2+|\overrightarrow{AO}|^2=x^2+y^2+4=r^2=(x+2)^2$，化简可得点$M$的轨迹方程为$y^2=4x$.

(1)由于$A$在直线$x+y=0$上，且$A$，$B$关于坐标原点$O$对称，则知点$M$在直线$y=x$上，那么将$y=x$代入$y^2=4x$，可得$x^2=4x$，解得$x=0$或$x=4$.

所以$\odot M$的半径$r=2$或$r=6$.

(2)存在定点$P(1,0)$，使得$|MA|-|MP|$为定值. 理由如下：

由于$y^2=4x$是以点$P(1,0)$为焦点，以直线$x=-1$为准线的抛物线，则有$|MP|=x+1$，而结合抛物线的定义有$|MA|-|MP|=r-|MP|=x+2-(x+1)=1$，所以存在满足条件的定点$P(1,0)$.

点评：涉及解析几何中的关系式定值问题，经常以和、差、积、商等运算加以合理组合，涉及线段的长度、平面图形的面积等元素，破解时可以采取数形结合思想，抓住曲线的定义、几何意义等加以合理转化，利用函数、方程、不等式等工具，从而得以正确破解.

总之，研究与探索解析几何的定值问题，进而得以发现解析几何中相互元素(包括点、直线、圆、圆锥曲线等)之间的联系，挖掘内在规律，提升思维深度，提高解题效率，加强对相关知识的正确理解与深入掌握，对提升数学解题能力与应用能力，以及增强解题效益和培养数学核心素养等方面都有效益.



万方数据