2021届高三第一次质量检测
数学

（考试时间 120 分钟　　满分 150 分）

注意事项:
1.答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上.
2.选择题作答时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.

一、单项选择题:本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.函数 $f(x)=\sqrt{3-x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$的定义域为　　（　）

A. $(1,3]$　　B. $[1,3]$　　C. $(-\infty,1)$　　D. $[3,+\infty)$

2.已知 a,b,c,d∈R，则下列命题正确的是　　（　）

A.若 a>b, n∈N^+，则$a^n > b^n$　　B.若 a>b, c<d，则 a-c>b-d

C.若 a>b, c>d，则 ac>bd　　D.若 a>b，则$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

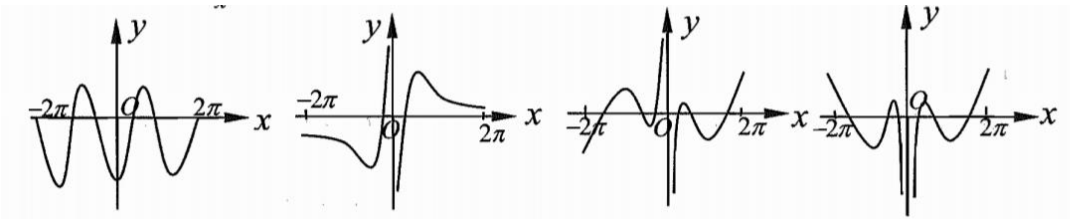
3.集合 $M=\{y|y=\frac{8}{x+1}, x\in N, y\in N\}$的非空子集个数是　　（　）

A.3　　B. 7　　C.15　　D.31

4.已知 $a=(\frac{1}{2})^{-\frac{1}{3}}$, $b=\log_{\frac{1}{3}}2$，$c=(\frac{1}{3})^{\frac{1}{2}}$，则 a,b,c 的大小关系是　　（　）

A. a<b<c　　B. b<a<c　　C. c<a<b　　D. b<c<a

5.函数 $f(x)=(x-\frac{1}{x})\cos x$ 在其定义域上的图象大致是　　（　）



6.函数 $f(x)=\ln x-2x-\frac{1}{x}$的单调减区间为　　（　）

A. $(1,+\infty)$　　B. $(0,1)$　　C. $(-\frac{1}{2},1)$　　D. $(-\infty,-\frac{1}{2})$和$(1,+\infty)$

7.某种物体放在空气中冷却，如果原来的温度是θ_1℃，空气的温度是θ_0℃,那么 t min

后物体的温度θ (单位: ℃)满足: θ=θ_0 +(θ_1-θ_0)$e^{-0.2t}$.若将物体放在 15 ℃的空气中从 62℃分别冷却到 45 ℃和 30℃所用时间为t_1，t_2，则t_2-t_1，的值为(取 ln2=0.7，e=2.718...)( )

A.-$\frac{7}{2}$ B.-$\frac{2}{7}$ C.$\frac{7}{2}$ D.$\frac{2}{7}$

8.已知函数 f(x)=lnx+$\frac{a}{x}$，∀m,n∈[1,2], m≠n 时，都有$\frac{f(m+1)-f(n-1)}{m-n}$>0，则实数 a 的取值范围是 ( )

A. (一∞,1) B. (一∞,1] C. (一∞,2) D. (一∞,2]

二、多项选择题:本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对得 5 分，部分选对得 3 分，有选错的得 0 分.

9.下列命题正确的是 ( )

A.“a>1”是“a^2>1”的充分不必要条件

B.“M>N”是“1gM>1gN”的必要不充分条件

C.命题“∀x∈R，x^2 +1<0”的否定是“∃x∈R，使得x^2+1<0”

D.设函数 f(x)的导数为 f"(x)，则“f"(x_0)=0”是“f(x)在 x=x_0处取得极值”的充要条件

10.设 a>b>0，则下列不等式一定成立的是 ( )

A.$\frac{a}{b}-\frac{b}{a}<0$ B.2020^{a-b}>1 C.$\frac{2ab}{a+b}<\sqrt{ab}$ D.$a^b>b^a$

11.定义在 R 上的奇函数 f(x)满足 f(1-x)=f(1+x)，则

A.函数 f(x)的图象关于原点对称 B.函数 f(x)的图象关于直线 x=1 对称

C.函数 f(x)是周期函数且对于任意 x∈R，f(x+2)= f(x)成立

D.当 x∈(0,1]时，f(x)=e^x-1， 则函数 f(x)在区间[1 + 4k,3+ 4k](k∈Z)上单调递减(其中 e 为自然对数的底数)

12.已知函数 f(x)=x^n +$\frac{4}{x^n}$ (n 为正整数)，则下列判断正确的是 ( )

A.函数 f(x)始终为奇函数

B.当 n 为偶数时，函数 f(x)的最小值为 4

C.当 n 为奇数时，函数 f(x)的极小值为 4

D.当 n=1 时，函数 y= f(x)的图象关于直线 y=2x 对称

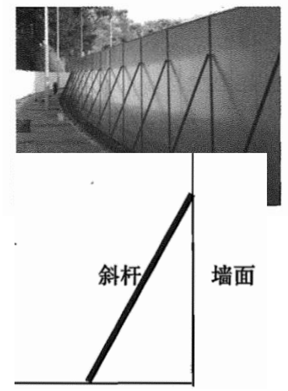
三、填空题:本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分　　.

13.已知函数 f(x)=$\begin{cases} \frac{1}{x}, 0 < x < 1 \\ 2(x-1), x \geq 1 \end{cases}$,若 f(a)= f(a+1),则实数 a=___________

14.若 2s+3t=st(s>0,t>0)，则 s+t 的最小值是___________

15.已知偶函数 f(x) (x≠0) 的导函数为 f''(x)，f(e)=e， 当 x>0 时，xf'(x)一 2f(x)>0，则使 f(x-1)>$\frac{1}{e}(x-1)^2$成立的 x 的取值范围是______(其中 e 为自然对数的底数)

16.校园内因改造施工，工人师傅用三角支架固定墙面(墙面与地面垂直) (如图)，现在一支架斜.杆长为 16 dm，一端靠在墙上， 另一端落在地面.上，则该支架斜杆与其在墙面和地面上射影所围成三角形周长的最大值为__________ dm; 现为调整支架安全性，要求前述直角三角形周长为 30 dm，面积为 30 dm2，则此时斜杆长度应设计为_________dm. (第一空 2 分，第二空 3 分.)



四、解答题:本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

在①A∩B=A,②A∩B≠∅,③B∈C_RA 这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，若问题中的实数 a 存在，求 a 的取值范围;若不存在，说明理由.

问题:已知集合 A={x|$\frac{x-a}{x+1}$<0,x∈R}，B= {x|log_2(1-x)≤1,x∈R}，是否存在实数 a，使得____________?

注:如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

18. (本小题满分 12 分)

已知函数 f(x)= x^2 +ax+b，a,b∈R,关于 x 的不等式 f(x) <0 的解集为(2,3).

(1)求 a,b 的值;

(2)求函数 y= f(f(x))一 2 的所有零点之积.

19. (本小题满分 12 分)

设函数 f(x)=$-\frac{1}{3}x^3$+(k-1)x^2 +(k^2-2k-3)x，x∈R，k∈R.

(1)若函数 f(x)为奇函数，求函数 f(x)在区间[—3,3] 上的最值;

(2)若函数 f(x)在区间(0,2)内不单调，求实数 k 的取值范围.

22. 20. (本小题满分 12 分)

经验表明，在室温 25°C 下，85 °C 开水冷至 35 °C 到 40°C (温水)饮用对身体更有益.某研究人员每隔 1min 测量一次开水温度(如下表)，经过 xmin 后的温度为 Y°C.现给出以下 2 个函数模型:①y=kx°+25(k∈R,0<a<l,x⩾0);②y=ka^x +25(k∈R,0<a<1,x⩾0),其中 a 为温度衰减比例，计算公式为: a= $\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}\frac{y_i-25}{y_{i-1}-25}$ (i∈N).

开水温度变化

时间 x/min	0	1	2	3	4	5
水温 y /°C	85	79	75	71	68	65

(1)请选择-一个恰当的函数模型描述 x,y 之间的关系，并求出 k;

(2)求 a 值(a 保留 0.01);

(3)在 25 °C 室温下，85 °C 开水至少大约放置多长时间(单位: min,保留整数)才能冷至到对身体有益温度? (参考数据:$\frac{1}{0.92^{16.6}}$≈4,$\frac{1}{0.92^{21.5}} \approx 6$)

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 f(x)=(x-2)lnx+x-1 .

(1)求曲线 y=f(x)在点 P(1,f(1))处的切线方程;

(2)已知 x=x_0是函数 y=f(x)的极值点，若 f(x_1)=f(x_2)，$x_1 \neq x_2, x_1, x_2$∈R，求证:$x_1 + x_2$>$2x_0$ (极值点是指函数取极值时对应的自变量的值)

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 f(x)=e^{x-1} +ax，g(x)= bx-blnx,其中 e 为自然对数的底数，a, b∈R.

(1)讨论函数 f(x)在(0,+∞)上的单调性;

(2)当 $a=0$ 时，$f(x)\geqslant xg(x)$对 $x>0$ 恒成立，求实数 b 的取值范围.

数学参考答案与评分细则

一、单选题（每题5分）

1. A；2. B；3. C；4. D；5. C；6. A；7. C；8. D；

二、多选题（每题5分，漏选得3分，错选得0分）

9. AB；10. BC；11. ABD；12. BC

三、填空题（每题5分，注意16题第一空2分，第二空3分）

13. $\frac{\sqrt{2}}{2}$；14. $5+2\sqrt{6}$；15. $(-\infty,1-e)\cup(1+e,+\infty)$；16.（1）$16+16\sqrt{2}$ （2） 13．

四、解答题

17. 解：$B=\{x\mid \log_2(1-x)\le 1,x\in R\}=[-1,1)$，

$A=\{x\mid \frac{x-a}{x+1}<0,x\in R\}=\{x\mid (x-a)(x+1)<0,x\in R\}$，

当$a>-1$时，$A=(-1,a)$；

当$a=-1$时，$A=\varnothing$；

当$a<-1$时，$A=(a,-1)$．

若选择① $A\cap B=A$，则$A\subseteq B$，

当$a>-1$时，要使$(-1,a)\subseteq[-1,1)$，则$a\le 1$，所以$-1<a\le 1$；

当$a=-1$时，$A=\varnothing$，满足题意；

当$a<-1$时，$A=(a,-1)$不满足题意．

所以选择①，则实数a的取值范围是$[-1,1]$．

若选择② $A\cap B\ne\varnothing$，

当$a>-1$时，$A=(-1,a)$，$B=[-1,1)$，满足题意；

当$a=-1$时，$A=\varnothing$，不满足题意；

当$a<-1$时，$A=(a,-1)$，$B=[-1,1)$，不满足题意．

所以选择②，则实数a的取值范围是$(-1,+\infty)$．

若选择③ $B\subseteq \complement_R A$，

当$a>-1$时，$A=(-1,a)$，$\complement_R A=(-\infty,-1]\cup[a,+\infty)$，而$B=[-1,1)$，不满足题意；

当$a=-1$时，$A=\varnothing$，$\complement_R A=R$，而$B=[-1,1)$，满足题意；

当$a<-1$时，$A=(a,-1)$，$\complement_R A=(-\infty,a]\cup[-1,+\infty)$，而$B=[-1,1)$，满足题意．

所以选择③，则实数a的取值范围是$(-\infty,-1]$．

（注意：若解答过程中不是先讨论集合A，而是在求解过程中讨论，则每种情况2分）

18. 解：（1）因为不等式$f(x)<0$的解集为$(2,3)$，即$x^2+ax+b<0$的解集为$(2,3)$，

所以方程$x^2+ax+b=0$的解为2和3，

所以$\begin{cases}a^2-4b>0,\\-a=5,\\b=6,\end{cases}$

解得$a=-5,b=6$．

所以a,b的值分别为-5和6．

（2）由（1）得$f(x)=x^2-5x+6$，

令 $f(f(x))-2=0$，即 $[f(x)]^2-5f(x)+6=2$，

解得 $f(x)=1$ 或 $f(x)=4$，

即 $x^2-5x+5=0$ 或 $x^2-5x+2=0$，

设方程 $x^2-5x+5=0$ 的解为 x_1,x_2，方程 $x^2-5x+2=0$ 的解为 x_3,x_4，

所以 $x_1x_2=5$，$x_3x_4=2$，

函数 $y=f(f(x))-2$ 的所有零点之积为 10．

19．解：（1）因为函数 $f(x)$ 为奇函数，

所以 $f(-x)=f(x)$ 对 $\forall x\in\mathrm{R}$ 成立，

即 $-\dfrac{1}{3}x^3+(k-1)x^2-(k^2-2k-3)x=-\dfrac{1}{3}x^3-(k-1)x^2-(k^2-2k-3)x$ 对 $\forall x\in\mathrm{R}$ 成

即 $2(k-1)x^2=0$ 对 $\forall x\in\mathrm{R}$ 成立，

所以 $k=1$．

此时 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-4x$，

$f'(x)=x^2-4=(x+2)(x-2)$，$x\in[-3,3]$，

令 $f'(x)=0$，则 $x=-2$ 或 $x=2$，

x	-3	$(-3,-2)$	-2	$(-2,2)$	2	$(2,3)$	3
$f'(x)$		＋	0	－	0	＋	
$f(x)$		↗	极大值	↘	极小值	↗	

函数 $f(x)$ 的极大值为 $f(-2)=\dfrac{16}{3}$，极小值为 $f(2)=-\dfrac{16}{3}$，而 $f(-3)=3$，$f(3)=-3$．

所以函数 $f(x)$ 在区间 $[-3,3]$ 上的最大值为 $\dfrac{16}{3}$，最小值为 $-\dfrac{16}{3}$．

（2）因为 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+(k-1)x^2+(k^2-2k-3)x$，

所以 $f'(x)=x^2+2(k-1)x+(k^2-2k-3)=(x+k-3)(x+k+1)$，

令 $f'(x)=0$，得 $x=3-k$ 或 $x=-1-k$，

因为函数 $f(x)$ 在区间 $(0,2)$ 内不单调，

所以 $0<3-k<2$ 或 $0<-1-k<2$，

解得 $1<k<3$ 或 $-3<k<-1$．

所以实数 k 的取值范围为 $(-3,-1)\cup(1,3)$．

（注意：若（1）中直接利用 $f(0)=0$，没有检验则得 1 分；判断单调性求最值，同样得分。）

20．解：（1）若选择① $y=kx^a+25(k\in\mathrm{R},0<a<1,x\geq 0)$，

把 $x=0,y=85$ 代入，得 $85=25$ 矛盾；

若选择② $y=ka^x+25(k\in\mathrm{R},0<a<1,x\geq 0)$，

把 $x=0,y=85$ 代入，得 $k=60$．

所以应该选择② $y=ka^x+25(k\in\mathrm{R},0<a<1,x\geq 0)$，其中 k 的值为 60．

（2）$a=\dfrac{1}{5}\sum\limits_{i=1}^{5}\dfrac{y_i-25}{y_{i-1}-25}=\dfrac{1}{5}(\dfrac{54}{60}+\dfrac{50}{54}+\dfrac{46}{50}+\dfrac{43}{46}+\dfrac{40}{43})$

≈ 0.92．

（3）由（1）（2）知，x,y 之间的关系为 $y=60\times 0.92^x+25$，

因为85 ℃开水冷至35 ℃到40 ℃（温水）饮用对身体更有益，

所以$35 \le 60 \times 0.92^{x} + 25 \le 40$，

即$\frac{1}{6} \le 0.92^{x} \le \frac{1}{4}$，

所以$4 \le \frac{1}{0.92^{x}} \le 6$，

又因为$\frac{1}{0.92^{16.6}} \approx 4, \frac{1}{0.92^{21.5}} \approx 6$，

所以$16.6 \le x \le 21.5$．

所以在25 ℃室温下，85 ℃开水至少大约放置17min才能冷至到对身体有益温度．

21．解：（1）因为$f(x) = (x-2)\ln x + x - 1$，

所以$f'(x) = \ln x + \frac{x-2}{x} + 1$，

所以$f'(1) = 0$，

而$f(1) = 0$，

所以曲线$y = f(x)$在点$P(1, f(1))$处的切线方程为$y = 0$．

（2）由（1）得$f'(x) = \ln x + \frac{x-2}{x} + 1 = \ln x + 2 - \frac{2}{x}$，

令$g(x) = \ln x + 2 - \frac{2}{x}$，$x > 0$，

则$g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x} > 0$在$(0, +\infty)$上恒成立，

所以$g(x) = \ln x + 2 - \frac{2}{x}$在$(0, +\infty)$上单调递增，

而$g(1) = 0$，

所以当$0 < x < 1$时，$f'(x) < 0$；当$x > 1$时，$f'(x) > 0$，

所以当函数$f(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1, +\infty)$上单调递增，

所以函数$f(x)$在$x = 1$处取得极大值．

因为$f(x_1) = f(x_2)$，$x_1 \ne x_2, x_1, x_2 \in \mathrm{R}$，

所以不妨设$0 < x_1 < 1, x_2 > 1$，

令$h(x) = f(x) - f(2-x)$，$0 < x < 1$，

则$h'(x) = f'(x) + f'(2-x) = \ln x + 2 - \frac{2}{x} + \ln(2-x) + 2 - \frac{2}{2-x} = \ln x(2-x) + 4 - \frac{4}{x(2-x)}$，

因为$0 < x < 1$，所以$0 < x(2-x) < 1$，所以$\ln x(2-x) < 0, 4 - \frac{4}{x(2-x)} < 0$，

所以$h'(x) < 0$，即函数$h(x) = f(x) - f(2-x)$在$(0,1)$上单调递减，

而$h(1) = f(1) - f(1) = 0$，

所以$h(x) > h(1) = 0$在$(0,1)$上恒成立，即$f(x) > f(2-x)$在$(0,1)$上恒成立，

所以$f(x_1) > f(2-x_1)$在$(0,1)$上恒成立，

因为$f(x_1) = f(x_2)$，所以$f(x_2) > f(2-x_1)$，

因为$0 < x_1 < 1, x_2 > 1$，所以$2 - x_1 > 1$，而函数$f(x)$在$(1, +\infty)$上单调递增，

所以$x_2 > 2 - x_1$，即$x_1 + x_2 > 2$．

所以得证．

22．解：（1）因为$f(x) = \mathrm{e}^{x-1} + ax$，则$f'(x) = \mathrm{e}^{x-1} + a$，$x > 0$，

1° 当 $a \geqslant -\frac{1}{e}$ 时，$f'(x) > e^{-1} + a \geqslant 0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

2° 当 $a < -\frac{1}{e}$ 时，

令 $f'(x) = e^{x-1} + a > 0$，得 $x > \ln(-a)+1$，所以 $f(x)$ 在 $(\ln(-a)+1,+\infty)$ 上单调递增，

令 $f'(x) = e^{x-1} + a < 0$，得 $x < \ln(-a)+1$，所以 $f(x)$ 在 $(0,\ln(-a)+1)$ 上单调递减．

综上，当 $a \geqslant -\frac{1}{e}$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

当 $a < -\frac{1}{e}$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(\ln(-a)+1,+\infty)$ 上单调递增，在 $(0,\ln(-a)+1)$ 上单调递减.

（2）当 $a=0$ 时，$f(x) \ge xg(x)$ 对 $x>0$ 恒成立 $\Leftrightarrow e^{x-1} \geqslant bx^2 - bx\ln x$ 对 $x>0$ 恒成立，

【方法 1】条件 $\Leftrightarrow \frac{e^{x-1}}{x} - bx + b\ln x \geqslant 0$ 对 $x>0$ 恒成立，

令 $h(x) = \frac{e^{x-1}}{x} - bx + b\ln x$，

则 $h'(x) = \frac{e^{x-1}(x-1)}{x^2} + \frac{b(1-x)}{x} = \frac{(\frac{e^{x-1}}{x} - b)(x-1)}{x}$，$x>0$，

设 $\varphi(x) = \frac{e^{x-1}}{x} - b$，令 $\varphi'(x) = \frac{e^{x-1}(x-1)}{x^2} = 0$，得 $x=1$，

当 $x>1$ 时，$\varphi'(x)>0$，所以 $\varphi(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增；

当 $0<x<1$ 时，$\varphi'(x)<0$，所以 $\varphi(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，

所以 $\varphi(x) \geqslant \varphi(1) = 1-b$．

①若 $1-b \geqslant 0$，即 $b \leqslant 1$，

当 $x>1$ 时，$h'(x)>0$，所以函数 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增；

当 $0<x<1$ 时，$h'(x)<0$，所以函数 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，

所以 $h(x) \geqslant h(1) = 1-b \geqslant 0$ 成立．

所以 $b \leqslant 1$．

②当 $1-b<0$，即 $b>1$ 时，$h(1)=1-b<0$ 与 $h(x) \geqslant 0$ 矛盾；

综上，实数 b 的取值范围为 $(-\infty,1]$．

【方法 2】条件 $\Leftrightarrow e^{x-1-\ln x} - b(x-\ln x) \geqslant 0$ 对 $x>0$ 恒成立，

令 $h(x) = x - \ln x$，由 $h'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} = 0$ 得 $x=1$，

所以当 $x>1$ 时，$h'(x)>0$，所以函数 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

当 $0<x<1$ 时，$h'(x)<0$，所以函数 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减．

所以 $h(x) \geqslant h(1) = 1$．

令 $t = x - \ln x$，则 $t \geqslant 1$，则原问题等价于 $e^{t-1} - bt \geqslant 0$，对 $t \geqslant 1$ 恒成立，

等价于 $b \leqslant \frac{e^{t-1}}{t}$，对 $t \geqslant 1$ 恒成立，

令 $p(t) = \frac{e^{t-1}}{t}$，$t \geqslant 1$，则 $p'(t) = \frac{e^{t-1}(t-1)}{t^2} \geqslant 0$，

所以 $p(t)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $p(t)_{\min} = 1$，

所以，实数 b 的取值范围为 $(-\infty,1]$．