2021年普通高等学校招生全国统一考试模拟演练数学

（八省模考）

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的）

1．已知M,N**均为R的子集，且**$\complement_{R}M\subseteq N$**，则**$M\cup\left(\complement_{R}N\right)=$（　　）

A．$\varnothing$　　**B．**M　　**C．**N　　**D．R**

2．在3张卡片上分别写上3位同学的学号后，再把卡片随机分给这3位同学，每人1张，则恰有1位学生分到写有自己学号卡片的概率为（　　）

A．$\frac{1}{6}$　　**B．**$\frac{1}{3}$　　**C．**$\frac{1}{2}$　　**D．**$\frac{2}{3}$

3．关于x**的方程**$x^2+ax+b=0$**，有下列四个命题：甲：**$x=1$**是该方程的根；乙：**$x=3$**是该方程的根；丙：该方程两根之和为**2**；丁：该方程两根异号．如果只有一个假命题，则该命题是**（　　）　**A．**甲　**B．**乙　**C．**丙　**D．**丁

4．椭圆$\frac{x^2}{m^2+1}+\frac{y^2}{m^2}=1\left(m>0\right)$**的焦点为**$F_1$**、**$F_2$**，上顶点为**$A$**，若**$\angle F_1AF_2=\frac{\pi}{3}$**，则**$m=$（　　）

A．1　　**B．**$\sqrt{2}$　　**C．**$\sqrt{3}$　　**D．**2

5．已知单位向量$\vec{a},\vec{b}$**满足**$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$**，若向量**$\vec{c}=\sqrt{7}\vec{a}+\sqrt{2}\vec{b}$**，则**$\sin\langle\vec{a},\vec{c}\rangle=$（　　）

A．$\frac{\sqrt{7}}{3}$　　**B．**$\frac{\sqrt{2}}{3}$　　**C．**$\frac{\sqrt{7}}{9}$　　**D．**$\frac{\sqrt{2}}{9}$

6．$\left(1+x\right)^2+\left(1+x\right)^3+\cdots+\left(1+x\right)^9$**的展开式中**$x^2$**的系数是**（　　）

A．60　　**B．80**　　**C．84**　　**D．120**

7．已知抛物线$y^2=2px$**上三点**$A(2,2),B,C$**，直线**AB,AC**是圆**$(x-2)^2+y^2=1$**的两条切线，则直线**BC**的方程为**（　　）

A． $x+2y+1=0$　　B． $3x+6y+4=0$

C． $2x+6y+3=0$　　D． $x+3y+2=0$

8．已知$a<5$且$ae^5=5e^a$， $b<4$且$be^4=4e^b$， $c<3$且$ce^3=3e^c$，则（　　）

A． $c<b<a$　　B． $b<c<a$　　C． $a<c<b$　　D． $a<b<c$

二、多选题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每个小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 3 分，有选错的得 0 分）

9．已知函数 $f(x)=x\ln(1+x)$，则（　　）

A． $f(x)$在$(0,+\infty)$单调递增　　B． $f(x)$有两个零点

C．曲线$y=f(x)$在点$\left(-\frac{1}{2},f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$处切线的斜率为$-1-\ln 2$　　D． $f(x)$是偶函数

10．设z_1， z_2， z_3为复数，$z_1\neq 0$．下列命题中正确的是（　　）

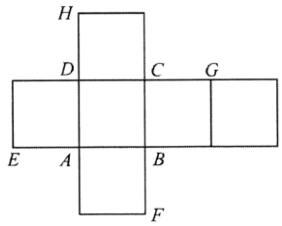
A．若$|z_2|=|z_3|$，则$z_2=\pm z_3$　　B．若$z_1z_2=z_1z_3$，则$z_2=z_3$

C．若$\overline{z}_2=z_3$，则$|z_1z_2|=|z_1z_3|$　　D．若$z_1z_2=|z_1|^2$，则$z_1=z_2$

11．下图是一个正方体的平面展开图，则在该正方体中（　　）

A． $AE//CD$　　B． $CH//BE$

C． $DG\perp BH$　　D． $BG\perp DE$



12．设函数$f(x)=\dfrac{\cos 2x}{2+\sin x\cos x}$，则（　　）

A． $f(x)=f(x+\pi)$　　B． $f(x)$的最大值为$\frac{1}{2}$

C． $f(x)$在$\left(-\frac{\pi}{4},0\right)$单调递增　　D． $f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$单调递减

三、填空题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．把答案填写在答题纸相应位置的横线上）

13. 圆台上、下底面的圆周都在一个直径为 10 的球面上，其上、下底面半径分别为 4 和 5，则该圆台的体积为______.

14．若正方形一条对角线所在直线的斜率为2，则该正方形的两条邻边所在直线的斜率分别为______，_____.

15．写出一个最小正周期为2的奇函数 $f(x)=$**________.**

16．对一个物理量做 n **次测量，并以测量结果的平均值作为该物理量的最后结果．已知最后结果的误差** $\varepsilon_n \sim N\left(0,\dfrac{2}{n}\right)$**，为使误差** ε_n **在** $(-0.5,0.5)$ **的概率不小于0.9545，至少要测量_____次（若** $X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$**，则** $P(|X-\mu|<2\sigma)=0.9545)$**）.**

四、解答题（本题共6小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17．已知各项都为正数的数列 $\{a_n\}$ **满足** $a_{n+2}=2a_{n+1}+3a_n$ **.**

（1）证明：数列 $\{a_n+a_{n+1}\}$ **为等比数列；**

（2）若 $a_1=\dfrac{1}{2}$**，** $a_2=\dfrac{3}{2}$**，求** $\{a_n\}$ **的通项公式.**

18．在四边形 $ABCD$ **中，** $AB//CD$**，** $AD=CD=BD=1$**.**

（1）若 $AB=\dfrac{3}{2}$**，求** BC**；　　（2）若** $AB=2BC$**，求** $\cos\angle BDC$ **.**

19．一台设备由三个部件构成，假设在一天的运转中，部件1，2，3需要调整的概率分别为0.1，0.2，0.3，各部件的状态相互独立.

（1）求设备在一天的运转中，部件1，2中至少有1个需要调整的概率；

（2）记设备在一天的运转中需要调整的部件个数为 X **，求** X **的分布列及数学期望.**

20．北京大兴国际机场的显著特点之一是各种弯曲空间的运用．刻画空间的弯曲性是几何研究的重要内容．用曲率刻画空间弯曲性，规定：多面体顶点的曲率等于2π与多面体在该点的面角之和的差（多面体的面的内角叫做多面体的面角，角度用弧度制），多面体面上非顶点的曲率均为零，多面体的总曲率等于该多面体各顶点的曲率之和．例如：正四面体在每个顶点有**3**个面角，每个面角是$\dfrac{\pi}{3}$，所以正四面体在各顶点的曲率为$2\pi-3\times\dfrac{\pi}{3}=\pi$，故其总曲率为$4\pi$．

（**1**）求四棱锥的总曲率；

（**2**）若多面体满足：顶点数-棱数+面数$=2$，证明：这类多面体的总曲率是常数．

21．双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左顶点为$A$，右焦点为$F$，动点$B$在$C$上．当$BF\perp AF$时，$|AF|=|BF|$．

（**1**）求C的离心率；　（**2**）若B在第一象限，证明：$\angle BFA=2\angle BAF$．

22．已知函数$f(x)=\mathrm{e}^x-\sin x-\cos x,\quad g(x)=\mathrm{e}^x+\sin x+\cos x$．

（**1**）证明：当$x>-\dfrac{5\pi}{4}$时，$f(x)\geqslant 0$；　（**2**）若$g(x)\geqslant 2+ax$，求a．

2021 年普通高等学校招生全国统一考试模拟演练数学答案

（八省模考）

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的）

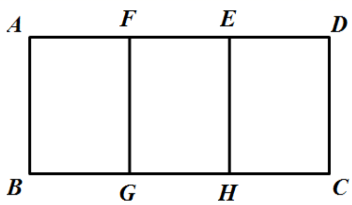
1. B ， **2.** C， **3.** A ，**4.** C ； **5.** B， **6.**D ， **7.**B ， **8.** D ；

1.【分析】由题意利用集合的包含关系或者画出 *Venn* 图，结合 *Venn* 图即可确定集合的运算结果.

【详解】解法一：$\because \complement_R M \subseteq N$,$\therefore M \supseteq \complement_R N$，据此可得$\therefore M \cup \left(\complement_R N\right) = M$.

故选：B.

解法二：如图所示，设矩形 *ABCD* 表示全集 *R*，



矩形区域*ABHE*表示集合*M*,则矩形区域*CDEH*表示集合$\complement_R M$，

矩形区域 *CDFG* 表示集合 *N*，满足$\complement_R M \subseteq N$，

结合图形可得：$M \cup \left(\complement_R N\right) = M$． 故选：B.

2.【分析】由题意列出所有可能的结果，然后利用古典概型计算公式即可求得满足题意的概率值.

【详解】设三位同学分别为A,B,C，他们的学号分别为$1,2,3$，

用有序实数列表示三人拿到的卡片种类，如$\left(1,3,2\right)$表示A同学拿到1号，B同学拿到3号，C同学拿到2号.

三人可能拿到的卡片结果为：$\left(1,2,3\right),\left(1,3,2\right),\left(2,1,3\right),\left(2,3,1\right),\left(3,1,2\right),\left(3,2,1\right)$，共 6 种，

其中满足题意的结果有$\left(1,3,2\right),\left(2,1,3\right),\left(3,2,1\right)$，共 3 种，

结合古典概型计算公式可得满足题意的概率值为：$p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$． 故选：C.

【点睛】方法点睛： 有关古典概型的概率问题，关键是正确求出基本事件总数和所求事

件包含的基本事件数.

(1)基本事件总数较少时，用列举法把所有基本事件一一列出时，要做到不重复、不遗漏.

(2)注意区分排列与组合，以及计数原理的正确使用.

3.【分析】对甲、乙、丙、丁分别是假命题进行分类讨论，分析各种情况下方程 $x^2+ax+b=0$ 的两根，进而可得出结论.

【详解】若甲是假命题，则乙丙丁是真命题，则关于 x 的方程 $x^2+ax+b=0$ 的一根为 3，由于两根之和为 2，则该方程的另一根为 -1，两根异号，合乎题意；

若乙是假命题，则甲丙丁是真命题，则 $x=1$ 是方程 $x^2+ax+b=0$ 的一根，

由于两根之和为 2，则另一根也为 1，两根同号，不合乎题意；

若丙是假命题，则甲乙丁是真命题，则关于 x 的方程 $x^2+ax+b=0$ 的两根为 1 和 3，两根同号，不合乎题意；

若丁是假命题，则甲乙丙是真命题，则关于 x 的方程 $x^2+ax+b=0$ 的两根为 1 和 3，两根之和为 4，不合乎题意.

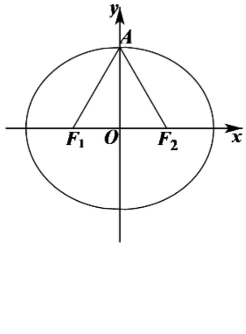
综上所述，甲命题为假命题.　　故选：A.

【点睛】关键点点睛：本题考查命题真假的判断，解题的关键就是对甲、乙、丙、丁分别是假命题进行分类讨论，结合已知条件求出方程的两根，再结合各命题的真假进行判断.

4.【分析】分析出 $\triangle F_1AF_2$ 为等边三角形，可得出 $a=2c$，进而可得出关于 m 的等式，即可解得 m 的值.

【详解】在椭圆 $\dfrac{x^2}{m^2+1}+\dfrac{y^2}{m^2}=1\left(m>0\right)$ 中，$a=\sqrt{m^2+1}$，

$b=m$，$c=\sqrt{a^2-b^2}=1$，



如下图所示：因为椭圆 $\dfrac{x^2}{m^2+1}+\dfrac{y^2}{m^2}=1\left(m>0\right)$ 的上顶点为点 A，焦点为 F_1、F_2，

所以$\left|AF_1\right|=\left|AF_2\right|=a$，$\because \angle F_1AF_2=\dfrac{\pi}{3}$，

$\therefore \triangle F_1AF_2$为等边三角形，则$\left|AF_1\right|=\left|F_1F_2\right|$，即$\sqrt{m^2+1}=a=2c=2$，

因此，$m=\sqrt{3}$．　故选：C.

5.【分析】本题借助$\cos\langle\vec{a},\vec{c}\rangle=\dfrac{\left|\vec{a}\cdot\vec{c}\right|}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{c}\right|}$将$\vec{c}=\sqrt{7}\vec{a}+\sqrt{2}\vec{b}$代入化简即可.

【详解】因为$\vec{a},\vec{b}$是单位向量，所以$\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=1$.

因为$\vec{c}=\sqrt{7}\vec{a}+\sqrt{2}\vec{b}$，所以$\left|\vec{c}\right|=\left|\sqrt{7}\vec{a}+\sqrt{2}\vec{b}\right|=\sqrt{\left(\sqrt{7}\vec{a}+\sqrt{2}\vec{b}\right)^2}=\sqrt{7\left|\vec{a}\right|^2+2\left|\vec{b}\right|^2}=3$.

所以$\cos\langle\vec{a},\vec{c}\rangle=\dfrac{\left|\vec{a}\cdot\vec{c}\right|}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{c}\right|}=\dfrac{\left|\vec{a}\cdot\left(\sqrt{7}\vec{a}+\sqrt{2}\vec{b}\right)\right|}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{c}\right|}=\dfrac{\sqrt{7}\left|\vec{a}\right|^2+\sqrt{2}\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{c}\right|}=\dfrac{\sqrt{7}}{\left|\vec{c}\right|}=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$

所以$\sin\langle\vec{a},\vec{c}\rangle=\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{7}}{3}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.　故选：B.

6. 【分析】$\left(1+x\right)^2+\left(1+x\right)^3+\cdots+\left(1+x\right)^9$的展开式中$x^2$的系数是

$C_2^2+C_3^2+C_4^2+\cdots+C_9^2$，借助组合公式：$C_n^{m-1}+C_n^m=C_{n+1}^m$，逐一计算即可.

【详解】$\left(1+x\right)^2+\left(1+x\right)^3+\cdots+\left(1+x\right)^9$的展开式中$x^2$的系数是$C_2^2+C_3^2+C_4^2+\cdots+C_9^2$

因为$C_n^{m-1}+C_n^m=C_{n+1}^m$且$C_2^2=C_3^3$，所以$C_2^2+C_3^2=C_3^3+C_3^2=C_4^3$，

所以$C_2^2+C_3^2+C_4^2=C_4^2+C_4^3=C_5^3$，

以此类推，$C_2^2+C_3^2+C_4^2+\cdots+C_9^2=C_9^3+C_9^2=C_{10}^3=\dfrac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$.

故选：D.

【点睛】本题关键点在于使用组合公式：$C_n^{m-1}+C_n^m=C_{n+1}^m$，以达到简化运算的作用.

7.【分析】先利用点$A(2,2)$求抛物线方程，利用相切关系求切线AB，AC，再分别联立直

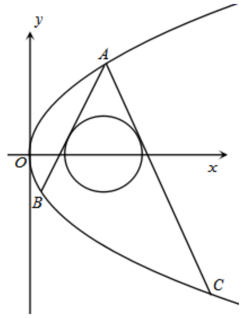
线和抛物线求出点 B,C，即求出直线 BC 方程.

【详解】$A(2,2)$ 在抛物线 $y^2=2px$ 上，故 $2^2=2p\times 2$，即 $p=1$，抛物线方程为 $y^2=2x$，

设过点 $A(2,2)$ 与圆 $(x-2)^2+y^2=1$ 相切的直线的方程为：$y-2=k\left(x-2\right)$，即

$kx-y+2-2k=0$，则圆心 $\left(2,0\right)$ 到切线的距离 $d=\dfrac{\left|2k-0+2-2k\right|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，解得 $k=\pm\sqrt{3}$，

如图，直线 $AB:y-2=\sqrt{3}\left(x-2\right)$，直线 $AC:y-2=-\sqrt{3}\left(x-2\right)$.



联立 $\begin{cases} y-2=\sqrt{3}\left(x-2\right) \\ y^2=2x \end{cases}$，得 $3x^2+\left(4\sqrt{3}-14\right)x+16-8\sqrt{3}=0$，

故 $x_Ax_B=\dfrac{16-8\sqrt{3}}{3}$，由 $x_A=2$ 得 $x_B=\dfrac{8-4\sqrt{3}}{3}$，故 $y_B=\dfrac{2\sqrt{3}-6}{3}$，

联立 $\begin{cases} y-2=\sqrt{3}\left(x-2\right) \\ y^2=2x \end{cases}$，得 $3x^2-\left(4\sqrt{3}+14\right)x+16+8\sqrt{3}=0$，

故 $x_Ax_C=\dfrac{16+8\sqrt{3}}{3}$，由 $x_A=2$ 得 $x_C=\dfrac{8+4\sqrt{3}}{3}$，故 $y_C=\dfrac{-2\sqrt{3}-6}{3}$，

故 $y_B+y_C=\dfrac{2\sqrt{3}-6}{3}+\dfrac{-2\sqrt{3}-6}{3}=-4$，又由 B,C 在抛物线上可知，

直线 BC 的斜率为 $k_{BC}=\dfrac{y_B-y_C}{x_B-x_C}=\dfrac{y_B-y_C}{\frac{1}{2}{y_B}^2-\frac{1}{2}{y_C}^2}=\dfrac{2}{y_B+y_C}=\dfrac{2}{-4}=-\dfrac{1}{2}$，

故直线 BC 的方程为 $y-\dfrac{2\sqrt{3}-6}{3}=-\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{8-4\sqrt{3}}{3}\right)$，即 $3x+6y+4=0$.

故选：B.

【点睛】方法点睛：求圆的切线的方程的求法：

（1）几何法：设直线的方程，利用圆心到直线的距离等于半径构建关系求出参数，即得方程；

（2）代数法：设直线的方程，联立直线与圆的方程，使判别式等于零解出参数，即可得

方程.

8. 【分析】令 $f\left(x\right)=\dfrac{e^{x}}{x},x>0$，利用导数研究其单调性后可得 a,b,c 的大小.

【详解】因为 $a\mathrm{e}^{5}=5\mathrm{e}^{a}$， $a<5$，故 $a>0$，同理 $b>0,c>0$，

令 $f\left(x\right)=\dfrac{e^{x}}{x},x>0$，则 $f'\left(x\right)=\dfrac{e^{x}\left(x-1\right)}{x^{2}}$，

当 $0<x<1$ 时， $f'\left(x\right)<0$，当 $x>1$ 时， $f'\left(x\right)>0$，

故 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,1\right)$ 为减函数，在 $\left(1,+\infty\right)$ 为增函数，

因为 $a\mathrm{e}^{5}=5\mathrm{e}^{a}$， $a<5$，故 $\dfrac{\mathrm{e}^{5}}{5}=\dfrac{\mathrm{e}^{a}}{a}$，即 $f\left(5\right)=f\left(a\right)$，而 $0<a<5$，

故 $0<a<1$，同理 $0<b<1$， $0<c<1$， $f\left(4\right)=f\left(b\right)$， $f\left(3\right)=f\left(c\right)$

因为 $f\left(5\right)<f\left(4\right)<f\left(3\right)$，故 $f\left(a\right)<f\left(b\right)<f\left(c\right)$，

所以 $0<a<b<c<1$.　　故选：D.

【点睛】思路点睛：导数背景下的大小比较问题，应根据代数式的特征合理构建函数，再利用导数讨论其单调性，此类问题，代数式变形很关键.

二、**多选题**（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每个小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 3 分，有选错的得 0 分）

9.【答案】AC

【分析】根据函数的定义域可判断 D，利用函数的导数的正负可判断 A，利用导数的几何意义可判断 C，根据函数值的情况及零点定义可判断 B.

【详解】由 $f(x)=x\ln(1+x)$ 知函数的定义域为 $(-1,+\infty)$， $f'(x)=\ln(1+x)+\dfrac{x}{1+x}$，

当 $x\in(0,+\infty)$ 时， $\ln(1+x)>0,\dfrac{x}{1+x}>0$， $\therefore f'(x)>0$，

故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，A 正确；

由 $f(0)=0$，当 $-1<x<0$ 时， $\ln(1+x)<0, f(x)=x\ln(1+x)>0$，

当$\ln(1+x)>0, f(x)>0$，所以$f(x)$只有 0 一个零点，B 错误；

令$x=-\frac{1}{2}$， $f'(-\frac{1}{2})=\ln\frac{1}{2}-1=-\ln 2-1$，故曲线$y=f(x)$在点$\left(-\frac{1}{2}, f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$处切线的斜率为$-1-\ln 2$，C 正确；

由函数的定义域为$(-1,+\infty)$，不关于原点对称知， $f(x)$不是偶函数，D 错误.

故选：AC

【点睛】关键点点睛：解决本题时，利用函数的导数判断函数的增减性，利用导数的几何意义求切线的斜率，属于中档题.

10.【答案】BC

【分析】取特殊值法可判断 AD 错误，根据复数的运算及复数模的性质可判断 BC.

【详解】由复数模的概念可知，$|z_2|=|z_3|$不能得到$z_2=\pm z_3$，例如$z_2=1+i,\quad z_3=1-i$，A 错误；

由$z_1z_2=z_1z_3$可得$z_1(z_2-z_3)=0$，因为$z_1\neq 0$，所以$z_2-z_3=0$，即$z_2=z_3$，B 正确；

因为$|z_1z_2|=|z_1||z_2|$，$|z_1z_3|=|z_1||z_3|$，而$\overline{z}_2=z_3$，所以$|\overline{z}_2|=|z_3|=|z_2|$，所以$|z_1z_2|=|z_1z_3|$，C 正确；

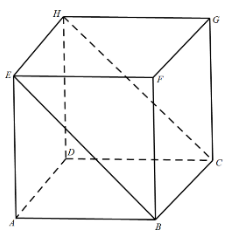
取$z_1=1+i,\quad z_2=1-i$，显然满足$z_1z_2=|z_1|^2$，但$z_1\neq z_2$，D 错误.

故选：BC

11.【答案】BCD

【分析】由平面展开图还原为正方体，根据正方体性质即可求解.

【详解】由正方体的平面展开图还原正方体如图，



由图形可知，

$AE\perp CD$，故 A 错误；

由$HE//BC, HE=BC$，四边形$BCHE$为平行四边形，所以$CH//BE$，故 B 正确；

因为$DG\perp HC, DG\perp BC$，$HC\cap BC=C$，所以$DG\perp$平面BHC，所以$DG\perp BH$，故 C

正确；

因为 $BG//AH$，而 $DE\perp AH$，所以 $BG\perp DE$，故 D 正确.　　故选：BCD

12.【答案】AD

【分析】先证明 $f(x)$ 为周期函数，周期为 π，从而 A 正确，再利用辅助角公式可判断 B 的正误，结合导数的符号可判断 C D 的正误.

【详解】$f(x)$ 的定义域为 R，且 $f(x)=\dfrac{\cos 2x}{2+\sin x\cos x}$，

$f(x+\pi)=\dfrac{\cos\left(2x+2\pi\right)}{2+\sin\left(x+\pi\right)\cos\left(x+\pi\right)}=\dfrac{\cos 2x}{2+\sin x\cos x}=f\left(x\right)$，故 A 正确.

又 $f(x)=\dfrac{2\cos 2x}{4+2\sin x\cos x}=\dfrac{2\cos 2x}{4+\sin 2x}$，令 $y=\dfrac{2\cos 2x}{4+\sin 2x}$，

则 $4y=2\cos 2x-y\sin 2x=\sqrt{4+y^2}\cos\left(2x+\varphi\right)$，其中 $\cos\varphi=\dfrac{2}{\sqrt{4+y^2}},\sin\varphi=\dfrac{y}{\sqrt{4+y^2}}$，

故 $\left|\dfrac{4y}{\sqrt{4+y^2}}\right|\le 1$ 即 $y^2\le\dfrac{4}{15}$，故 $-\dfrac{2\sqrt{15}}{15}\le y\le\dfrac{2\sqrt{15}}{15}$，

当 $y=\dfrac{2\sqrt{15}}{15}$ 时，有 $\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{15}}{4},\sin\varphi=\dfrac{1}{4}$，此时 $\cos\left(2x+\varphi\right)=1$ 即 $x=k\pi-\dfrac{\varphi}{2}$，

故 $y_{\max}=\dfrac{2\sqrt{15}}{15}$，故 B 错误.

$f'(x)=\dfrac{2\left[\left(-2\sin 2x\right)\left(4+\sin 2x\right)-2\cos^2 2x\right]}{\left(4+\sin 2x\right)^2}=\dfrac{-4\left(1+4\sin 2x\right)}{\left(4+\sin 2x\right)^2}$，

当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ 时，$f'(x)<0$，故 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ 为减函数，故 D 正确.

当 $x\in\left(-\dfrac{\pi}{4},0\right)$ 时，$-1<\sin 2x<0$，故 $-3<1+4\sin 2x<1$，

因为 $t=2x$ 为增函数且 $2x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$，而 $y=1+4\sin t$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$ 为增函数，

所以 $h\left(x\right)=1+4\sin 2x$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{4},0\right)$ 上为增函数，

故 $1+4\sin 2x=0$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{4},0\right)$ 有唯一解 x_0，

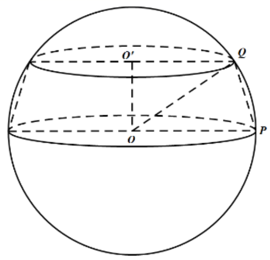
故当 $x\in\left(x_0,0\right)$ 时，$h\left(x\right)>0$ 即 $f'(x)<0$，故 $f(x)$ 在 $\left(x_0,0\right)$ 为减函数，故 C 不正确.

故选：AD

【点睛】方法点睛：与三角函数有关的复杂函数的研究，一般先研究其奇偶性和周期性，而单调性的研究需看函数解析式的形式，比如正弦型函数或余弦型函数可利用整体法来研究，而分式形式则可利用导数来研究，注意辅助角公式在求最值中的应用.

13.【答案】 61π

【分析】由题意首先确定几何体的空间结构特征，求得圆台的高，然后利用圆台的体积公式即可求得其体积.



【详解】圆台的下底面半径为 5，故下底面在外接球的大圆上，

如图所示，设球的球心为 O，圆台上底面的圆心为 O'，

则圆台的高 $OO'=\sqrt{OQ^2-O'Q^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$，

据此可得圆台的体积：$V=\dfrac{1}{3}\pi\times 3\times\left(5^2+5\times 4+4^2\right)=61\pi$.

故答案为：61π.

【点睛】关键点点睛：本题考查圆台与球的切接问题，解题的关键在于确定下底面与球的关系，然后利用几何关系确定圆台的高度即可求得其体积.

14.【答案】 $\dfrac{1}{3}$　　-3

【分析】先设对角线的倾斜角 θ，利用斜率定义列关系 $\tan\theta=2$，结合正方形性质求得直线 OA 与直线 OB 的倾斜角，计算正切值求斜率即可.

【详解】正方形 OABC 中，对角线 OB 所在直线的斜率为 2，建立如图直角坐标系，

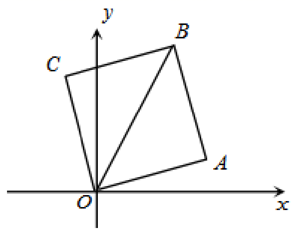
设对角线 OB 所在直线的倾斜角为 θ，则 $\tan\theta=2$，

由正方形性质可知，直线 OA 的倾斜角为 $\theta-45°$，直线 OB 的倾斜角为 $\theta+45°$，

故$k_{OA}=\tan\left(\theta-45°\right)=\dfrac{\tan\theta-\tan45°}{1+\tan\theta\tan45°}=\dfrac{2-1}{1+2}=\dfrac{1}{3}$，

$k_{OB}=\tan\left(\theta+45°\right)=\dfrac{\tan\theta+\tan45°}{1-\tan\theta\tan45°}=\dfrac{2+1}{1-2}=-3$.

故答案为：$\dfrac{1}{3}$；-3.



【点睛】　方法点睛：求直线斜率的方法：

（1）定义式：倾斜角为θ，对应斜率为$k=\tan\theta$；

（2）两点式：已知两点坐标$A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$，则过两点的直线的斜率$k_{AB}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

15.【答案】 $f(x)=\sin\pi x$

【分析】根据奇函数性质可考虑正弦型函数$f(x)=A\sin\omega x$，$\left(A\neq0\right)$，再利用周期计算ω，选择一个作答即可.

【详解】由最小正周期为2，可考虑三角函数中的正弦型函数$f(x)=A\sin\omega x$，$\left(A\neq0\right)$，

满足$f(-x)=-\sin\omega x=-f(x)$，即是奇函数；

根据最小正周期$T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2$，可得$\omega=\pi$.

故函数可以是$f(x)=A\sin\pi x\ \left(A\neq0\right)$中任一个，可取$f(x)=\sin\pi x$.

故答案为：$f(x)=\sin\pi x$.

16.【答案】 32

【分析】因为$\varepsilon_n\sim N\left(0,\dfrac{2}{n}\right)$，得到$\mu=0$，$\sigma=\sqrt{\dfrac{2}{n}}$，要使误差$\varepsilon_n$在$(-0.5,0.5)$的概率不小于0.9545，

则$\left(\mu-2\sigma,\mu+2\sigma\right)\subset\left(-0.5,0.5\right)$，得到不等式计算即可.

【详解】根据正态曲线的对称性知：要使误差ε_n在$(-0.5,0.5)$的概率不小于0.9545，

则$\left(\mu-2\sigma,\mu+2\sigma\right)\subset\left(-0.5,0.5\right)$且$\mu=0$，$\sigma=\sqrt{\frac{2}{n}}$，所以$0.5\geq 2\sqrt{\frac{2}{n}}\Rightarrow n\geq 32$.

故答案为：32.

【点睛】本题是对正态分布的考查，关键点在于能从$\varepsilon_n\sim N\left(0,\frac{2}{n}\right)$读出所需信息.

四、解答题（本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17.【答案】（1）证明见解析；（2）$a_n=\frac{3^{n-1}}{2}$（$n\in\mathbf{N}_+$）

【分析】（1）两边同时加上a_{n+1}即可得到数列$\left\{a_n+a_{n+1}\right\}$为等比数列；（2）利用待定系数法构造$a_{n-2}-3a_{n-1}=k\left(a_{n+1}-3a_n\right)$，通过整理解出$k=-1$，进而得到$a_{n+2}-3a_{n+1}=-\left(a_{n+1}-3a_n\right)$，所以$\left\{a_n\right\}$是以$a_1=\frac{1}{2}$为首项，3 为公比的等比数列，即可得到答案.

【详解】（1）由$a_{n+2}=2a_{n+1}+3a_n$可得：$a_{n+2}+a_{n+1}=3a_{n+1}+3a_n=3\left(a_{n+1}+a_n\right)$

因为各项都为正数，所以$a_1+a_2>0$，所以$\left\{a_n+a_{n+1}\right\}$是公比为 3 的等比数列.

（2）构造$a_{n+2}-3a_{n+1}=k\left(a_{n+1}-3a_n\right)$，整理得：$a_{n-2}=\left(k+3\right)a_{n+1}-3ka_n$

所以$k=-1$，即$a_{n+2}-3a_{n+1}=-\left(a_{n+1}-3a_n\right)$； 所以$a_{n+1}-3a_n=0\Rightarrow a_{n+1}=3a_n$，

所以$\left\{a_n\right\}$是以$a_1=\frac{1}{2}$为首项，3 为公比的等比数列. 所以$a_n=\frac{3^{n-1}}{2}$（$n\in\mathbf{N}_+$）

【点睛】

本题关键点在于第(2)问中的待定构造,能够根据特征,构造出$a_{n-2}-3a_{n-1}=k\left(a_{n+1}-3a_n\right)$是关键.

18. **【答案】**（1）$BC=\frac{\sqrt{2}}{2}$；（2）$\cos\angle BDC=\sqrt{3}-1$.

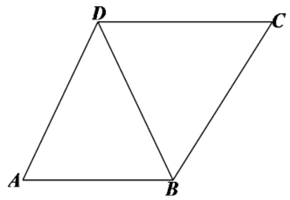
【分析】(1)利用余弦定理计算得出$\cos\angle ABD$，进而可得出$\cos\angle BDC$，然后在$\triangle BCD$

中，利用余弦定理可计算出 BC；

（2）设 $BC=x$，利用余弦定理结合 $\angle BDC=\angle ABD$ 可得出关于 x 的方程，进而可解得 x 的值，即可求得 $\cos\angle BDC$.

【详解】（1）在 $\triangle ABD$ 中，由余弦定理可得 $\cos\angle ABD=\dfrac{AB^2+BD^2-AD^2}{2AB\cdot BD}=\dfrac{3}{4}$，

$\because CD//AB$，$\therefore \angle BDC=\angle ABD$，



在 $\triangle BCD$ 中，由余弦定理可得

$BC^2=BD^2+CD^2-2BD\cdot CD\cos\angle BDC=\dfrac{1}{2}$，$BC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；

（2）设 $BC=x$，则 $AB=2x$，

在 $\triangle ABD$ 中，$\cos\angle ABD=\dfrac{AB^2+BD^2-AD^2}{2AB\cdot BD}=\dfrac{4x^2}{4x}=x$，

在 $\triangle BCD$ 中，$\cos\angle BDC=\dfrac{BD^2+CD^2-BC^2}{2BD\cdot CD}=\dfrac{2-x^2}{2}$，

由（1）可知，$\angle BDC=\angle ABD$，所以，$\cos\angle BDC=\cos\angle ABD$，即 $\dfrac{2-x^2}{2}=x$，

整理可得 $x^2+2x-2=0$，因为 $x>0$，解得 $x=\sqrt{3}-1$，

因此，$\cos\angle BDC=\cos\angle ABD=x=\sqrt{3}-1$.

【点睛】方法点睛：在解三角形的问题中，若已知条件同时含有边和角，但不能直接使用正弦定理或余弦定理得到答案，要选择“边化角”或“角化边”，变换原则如下：

（1）若式子中含有正弦的齐次式，优先考虑正弦定理“角化边”；

（2）若式子中含有 a、b、c 的齐次式，优先考虑正弦定理“边化角”；

（3）若式子中含有余弦的齐次式，优先考虑余弦定理“角化边”；

（4）代数式变形或者三角恒等变换前置；

（5）含有面积公式的问题，要考虑结合余弦定理求解；

（6）同时出现两个自由角（或三个自由角）时，要用到三角形的内角和定理.

19.【答案】(1)0.28；(2)分布列见解析，$E\left(X\right)=0.6$.

【分析】(1)由题意利用对立事件概率公式即可求得满足题意的概率值；

(2)首先确定X可能的取值，然后分别求解其概率值，最后确定其分布列并求解数学期望即可.

【详解】(1)设部件1需要调整为事件A，部件2需要调整为事件B，部件3需要调整为事件C，　由题意可知：$P\left(A\right)=0.1,P\left(B\right)=0.2,P\left(C\right)=0.3$.

部件1，2中至少有1个需要调整的概率为：

$1-\left[1-P\left(A\right)\right]\left[1-P\left(B\right)\right]=1-0.9\times0.8=1-0.72=0.28$.

(2)由题意可知X的取值为0，1,2,3.

且：$P\left(X=0\right)=\left[1-P\left(A\right)\right]\left[1-P\left(B\right)\right]\left[1-P\left(C\right)\right]$

$=\left(1-0.1\right)\times\left(1-0.2\right)\times\left(1-0.3\right)=0.504$,

$P\left(X=1\right)=P\left(A\right)\left[1-P\left(B\right)\right]\left[1-P\left(C\right)\right]+\left[1-P\left(A\right)\right]P\left(B\right)\left[1-P\left(C\right)\right]$

$+\left[1-P\left(A\right)\right]\left[1-P\left(B\right)\right]P\left(C\right)$

$=0.1\times0.8\times0.7+0.9\times0.2\times0.7+0.9\times0.8\times0.3=0.398$,

$P\left(X=2\right)=P\left(A\right)P\left(B\right)\left[1-P\left(C\right)\right]+P\left(A\right)\left[1-P\left(B\right)\right]P\left(C\right)+\left[1-P\left(A\right)\right]P\left(C\right)P\left(B\right)$

$=0.1\times0.2\times0.7+0.1\times0.8\times0.3+0.9\times0.2\times0.3=0.092$.

$P\left(X=3\right)=P\left(A\right)P\left(B\right)P\left(C\right)=0.1\times0.2\times0.3=0.006$,

故X的分布列为：

X	0	1	2	3
$P\left(X\right)$	0.504	0.398	0.092	0.006

其数学期望：$E\left(X\right)=0.504\times0+0.398\times1+0.092\times2+0.006\times3=0.6$.

【点睛】思路点睛：求离散型随机变量X的数学期望的一般步骤：

（1）先分析 X 的可取值，根据可取值求解出对应的概率；

（2）根据（1）中概率值，得到 X 的分布列；

（3）结合（2）中分布列，根据期望的计算公式求解出 X 的数学期望.

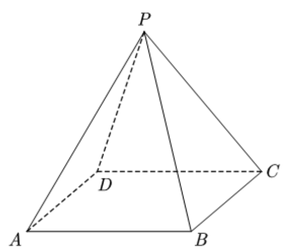
20. **【答案】**（1）4π；（2）证明见解析.

【分析】（1）四棱锥的总曲率等于四棱锥各顶点的曲率之和，写出多边形表面的所有内角即可.（2）设顶点数、棱数、面数分别为 n、l、m，设第 i 个面的棱数为 x_i，所以 $x_1+x_2+\cdots+x_m=2l$，按照公式计算总曲率即可.

【详解】

（1）由题可知：四棱锥的总曲率等于四棱锥各顶点的曲率之和.

可以从整个多面体的角度考虑，所有顶点相关的面角就是多面体的所有多边形表面的内角的集合.由图可知：四棱锥共有 5 个顶点，5 个面，其中 4 个为三角形，1 个为四边形.



所以四棱锥的表面内角和由 4 个为三角形，1 个为四边形组成，

则其总曲率为：$2\pi\times5-\left(4\pi+2\pi\right)=4\pi$.

（2）设顶点数、棱数、面数分别为 n、l、m，所以有 $n-l+m=2$

设第 i 个面的棱数为 x_i，所以 $x_1+x_2+\cdots+x_m=2l$

所以总曲率为：$2\pi n-\pi\left[\left(x_1-2\right)+\left(x_2-2\right)+\cdots+\left(x_m-2\right)\right]$

$=2\pi n-\pi\left(2l-2m\right)=2\pi\left(n-l+m\right)=4\pi$

所以这类多面体的总曲率是常数.

【点睛】本题考查立体几何的新定义问题，能够正确读懂“曲率”的概率是解决问题的关键.

21.【答案】（1）2；（2）见解析.

【分析】（1）根据已知条件可得 $\frac{b^2}{a}=a+c$，据此可求离心率.

（2）设 $B(x_0,y_0)$，则 $\tan\angle BFA=-\dfrac{y_0}{x_0-c}$，$\tan\angle BAF=\dfrac{y_0}{x_0+a}$，再计算 $\tan 2\angle BAF$，利用点在双曲线上化简后可得 $\tan 2\angle BAF=\tan\angle BFA$，从而可得结论成立.

【详解】（1）设双曲线的半焦距为 c，则 $F(c,0)$，$B\left(c,\pm\dfrac{b^2}{a}\right)$，因为 $|AF|=|BF|$，

故 $\dfrac{b^2}{a}=a+c$，故 $c^2-ac-2a^2=0$，即 $e^2-e-2=0$，故 $e=2$.

（2）设 $B(x_0,y_0)$，其中 $x_0>a,y_0>0$.因为 $e=2$，故 $c=2a$，$b=\sqrt{3}a$，

故渐近线方程为：$y=\pm\sqrt{3}x$，所以 $\angle BAF\in\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$，$\angle BFA\in\left(0,\dfrac{2\pi}{3}\right)$，

又 $\tan\angle BFA=-\dfrac{y_0}{x_0-c}=-\dfrac{y_0}{x_0-2a}$，$\tan\angle BAF=\dfrac{y_0}{x_0+a}$，

所以 $\tan 2\angle BAF=\dfrac{\dfrac{2y_0}{x_0+a}}{1-\left(\dfrac{y_0}{x_0+a}\right)^2}=\dfrac{2y_0(x_0+a)}{(x_0+a)^2-y_0^2}=\dfrac{2y_0(x_0+a)}{(x_0+a)^2-b^2\left(1-\dfrac{x_0^2}{a^2}\right)}$

$=\dfrac{2y_0(x_0+a)}{(x_0+a)^2-3a^2\left(\dfrac{x_0^2}{a^2}-1\right)}=\dfrac{2y_0(x_0+a)}{(x_0+a)^2-3(x_0^2-a^2)}=\dfrac{2y_0}{(x_0+a)-3(x_0-a)}=-\dfrac{y_0}{x_0-2a}=\tan\angle BFA$,

因为故 $2\angle BAF\in\left(0,\dfrac{2\pi}{3}\right)$，故 $\angle BFA=2\angle BAF$.

【点睛】方法点睛：（1）圆锥曲线中离心率的计算，关键是找到 a,b,c 一组等量关系（齐次式）.

（2）圆锥曲线中与有角有关的计算，注意通过动点的坐标来刻画角的大小，还要注意结合点在曲线上满足的方程化简目标代数式.

22.【答案】(1)证明见解析；(2) $a=2$.

【分析】(1)由题意分类讨论当$x\in\left(-\frac{5\pi}{4},-\frac{\pi}{4}\right]$，$x\in\left(-\frac{\pi}{4},0\right)$，$x\in[0,+\infty)$，几种情况即可证得题中的结论.

(2)观察(1)中的结论，首先讨论$x>-\frac{5\pi}{4}$时a的取值，然后验证当$x\leqslant-\frac{5\pi}{4}$时不等式成立即可求得实数$a$的值.

【详解】(1)分类讨论：

①.当$x\in\left(-\frac{5\pi}{4},-\frac{\pi}{4}\right]$，$f(x)=e^x-\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>0$；

②.当$x\in\left(-\frac{\pi}{4},0\right)$时，$f'(x)=e^x-\cos x+\sin x, f'(0)=0$，

$f''(x)=e^x+\sin x+\cos x=e^x+\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>0$，

则函数$f'(x)$在$\left(-\frac{\pi}{4},0\right)$上单调增，则$f'(x)<f'(0)=0$，

则函数$f(x)$在$\left(-\frac{\pi}{4},0\right)$上单调减，则$f(x)>f(0)=0$；

③.当$x=0$时，由函数的解析式可知$f(0)=1-0-1=0$，

当$x\in[0,+\infty)$时，令$H(x)=-\sin x+x\ (x\geq0)$，则$H'(x)=-\cos x+1\geq0$，

故函数$H(x)$在区间$[0,+\infty)$上单调递增，从而：$H(x)\geq H(0)=0$，

即$-\sin x+x\geq0,-\sin x\geq -x$，

从而函数$f(x)=e^x-\sin x-\cos x\geq e^x-x-1$，令$y=e^x-x-1$，则：$y'=e^x-1$，

当$x\geq0$时，$y'\geq0$，故$y=e^x-x-1$在$[0,+\infty)$单调递增，

故函数的最小值为$y_{\min}=e^0-0-1=0$，从而：$e^x-x-1\geq0$.

从而函数 $f\left(x\right)=e^{x}-\sin x-\cos x\geq e^{x}-x-1\geq 0$；

综上可得，题中的结论成立.

(2) 当 $x>-\frac{5}{4}\pi$ 时，令 $h\left(x\right)=g\left(x\right)-ax-2=e^{x}+\sin x+\cos x-ax-2$ ，

则 $h'\left(x\right)=e^{x}+\cos x-\sin x-a$， $h''\left(x\right)=f\left(x\right)>0$，故 $h'\left(x\right)$ 单调递增，

当 $a>2$ 时，$h'\left(0\right)=2-a<0$，$h'\left(\ln\left(a+2\right)\right)=2-\sqrt{2}\sin\left[\ln\left(a+2\right)-\frac{\pi}{4}\right]>0$，

$\exists x_1\in\left(0,\ln\left(a+2\right)\right)$ 使得 $h'\left(x_1\right)=0$，

当 $0<x<x_1$ 时，$h'\left(x\right)<0,h\left(x\right)$ 单调递减，$h\left(x\right)<h\left(0\right)=0$ 不符合题意;

同理可得 $a<2$ 不符合题意，

当 a=2 时，$h'\left(x\right)=e^{x}+\cos x-\sin x-2$，

由于 $h'\left(x\right)$ 单调递增，$h'\left(0\right)=0$，故：$-\frac{5}{4}\pi<x<0$ 时，$h'\left(x\right)<0,h\left(x\right)$ 单调递减;

$x>0$ 时，$h'\left(x\right)>0,h\left(x\right)$ 单调递增，此时 $h\left(x\right)\geq h\left(0\right)=0$ ；

当 $x\leqslant-\frac{5\pi}{4}$ 时，$h\left(x\right)=e^{x}+\sin x+\cos x-2x-2\geq 0-\sqrt{2}+\frac{5}{2}\pi-2>0$，

综上可得，a=2.

【点睛】对于利用导数研究不等式问题的求解策略：

1、通常要构造新函数，利用导数研究函数的单调性，求出最值，从而求出参数的取值范围；

2、利用可分离变量，构造新函数，直接把问题转化为函数的最值问题；

3、根据恒成求解参数的取值时，一般涉及分离参数法，但压轴试题中很少碰到分离参数后构造的新函数能直接求出最值点的情况，通常要设出导数的零点，难度较大.