在“推知”活动中涵养逻辑推理素养①

——以“线面垂直”的概念和判定为例

伍春兰[1] 丁明怡[2] 王 肖[3]

(1.北京教育学院数学系 100120;2.北京教育科学研究院 100036;3.中国人民大学附属中学通州校区 101100)

逻辑推理是《普通高中数学课程标准(2017年版)》提出的6个数学核心素养之一，也是数学学科一贯崇尚的学科价值. 通过数学课程的学习,学生“掌握逻辑推理的基本形式”[1]的指标易实现,但养成有逻辑地思考问题的习惯,“形成重论据、有条理、合乎逻辑的思维品质和理性精神”[1]的目标难达成,而后者正是逻辑推理素养的主要体现.

我们观点是只有在逻辑推理活动中,才能成就学生的逻辑推理素养. 下面以“线面垂直”的概念和判定为例,阐述我们在概念和定理教学中,创建“推知”活动的实践与思考.

1 “推知”概述

“推知”来源于《墨经》中的“说知”.《墨经》对于“知”这一部分的阐释，回答了知识论中的3个主要问题:“何者为知”“云何有知”“所知为何”. “云何有知”探讨了知识的本源:因“亲”“闻”“说”而知[2]. 通过自己的亲身经验,由感官的感觉而得来的知识是“亲知”;由他人的传授或阅读文字等而得来的知识是“闻知”;根据直接、间接知识经验,由思维据理推测,不为时空所阻而得来的知识是“说知”. 历代治墨学者多将“说知”解读为由推理、推论、推度、推断、推明、推测而得之知,简称为“推知”[3].

“推知”有“两义”,一是“推度以自悟”,二是“说明以悟他”[4]. 所谓“推度以自悟”,即求知者利用“推”的形式求知,达到“自悟”. 所谓“说明以悟他”,即在求知者明晓基础上,使用“推”的手段再令他人明晓[5]. 上述两点正是“推知”的价值所在,也是我们力主在教师有机引导下,创设学生“推知”方式学习高中数学概念和定理的理由. 这样,学生在已有的直接的“亲知”和间接的“闻知”基础上,通过学习共同体(班级、小组)长期合理的“推”的“自悟”和“悟他”,实现人人都能获得相应的知识技能,不同的人用数学思维发现、提出、分析和解决问题的能力和逻辑推理素养上得到不同的发展.

2 概念“推知”

2.1 “线面垂直”概念的分析

人民教育出版社《普通高中课程标准实验教科书数学必修2(A版)》(以下简称A版教材)的“线面垂直”定义可以简述为:直线与平面内的任意一条直线都垂直[6]. 人民教育出版社《普通高中课程标准实验教科书数学必修2(B版)》(以下简称B版教材)的“线面垂直”定义可以概述为:直线与平面内过交点的任何直线都垂直[7].

显然A版教材比B版教材“线面垂直”内涵要求严苛,因此用定义判定“线面垂直”更困难;反过来由“线面垂直”定义,A版教材可以直接得到“直线与平面内的任意一条直线都垂直”,B版教材对平面上不过交点的线,需要通过平移到交点得以证明.

虽然各版教材“线面垂直”定义并不统一,但都是“属加种差”定义方式. 因此,设计学生体验“线面垂直”定义合理性的思维活动时,首先要引导学生找出邻近属概念(线面相交);其次,引领学生比较“线面垂直”与“线面相交”的差别即种差;种差有性质种差、原因种差、关系种差等之别,“线

① 北京市促进通州区教师素质提升支持计划(2017—2020年)高中数学青年骨干工作室研究成果

万方数据

面垂直”的种差(线与面内的任意一条直线都垂直—按 A 版教材)是性质种差.

2.2 “线面垂直”概念的“推知”

在现实生活中,学生对“线面垂直”现象有一定的感性认识. 比如,由旗杆与地面的位置关系,大桥的桥柱与水面的位置关系,直立的人与地面的位置关系等,学生很易抽象出“线面垂直”的形象. 在 9 年级,他们还体验过利用相似(直角)三角形解决旗杆高度的测量问题. 虽然“线面垂直”定义不难理解,但抽象出数学定义的思维历程,是有教学价值的,也是学生困难点. 为此我们设计了如下 4 个递进活动,不仅让学生体会定义的合理性,也让他们经历了形成概念的思维活动.

2.2.1 用线与线(平面上)垂直刻画“线面垂直”的可能性

回顾直线与平面的位置关系(线在面内;线面相交;线面平行),学生易知“线面垂直”是特殊的“线面相交”,也易得“线面垂直”的线与面不斜交. 问题是怎样刻画“不斜”? 有学生说“垂直”,也有学生说“成 90 度的角”. 教师追问 1“如果垂直是指直线和平面垂直,思考又回到起点,那线该和谁垂直?”;教师追问 2“成 90 度的角,角的顶点在哪? 角的两边又在哪?”

追问促使学生深度反思,由此“推知”:“线面垂直”可以用线与线(平面上)垂直刻画.

2.2.2 “线面垂直”的必要性 1:线与平面上的线垂直的存在性

学生举例说明:直立于地面的旗杆与其在地面上的影子;竖立在桌面上的书,书脊所在直线与各页面和桌面的交线(图 1);长方体的高与底面的长、宽……

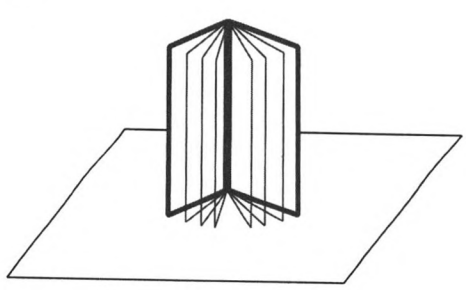

图 1

学生实验感受:一张矩形硬纸片对折,略为张开,然后直立于桌面上(图 2),折痕 PQ 所在线与对折后的矩形落在桌面上的线段 a、b 所在的线.

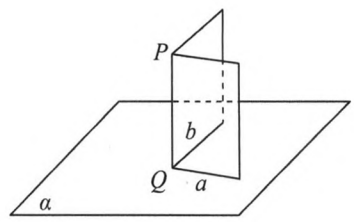

图 2

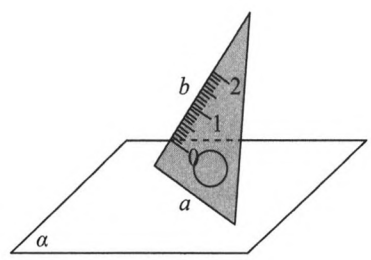

图 3

2.2.3 “线面垂直”的必要性 2:线与平面上的线垂直的无限性

学生举例感受:直立于地面的旗杆与其在地面上随着太阳移动的影子;矩形门轴所在线与开关门过程中转动的下底门框所在线……

2.2.4 “线面垂直”的充分性:存在线与无数条线(平面上)垂直,但线面不垂直

学生举反例证明,并实验操作:斜立在桌面上的直角三角板(一条直角边 a 在桌面上,见图 3),显然另一条直角边 b 和在桌面上与边 a 平行的线都垂直,但这条直角边 b 所在直线不和桌面垂直.

四个活动后学生反思,同时给“线面垂直”下定义并完善.

2.3 概念“推知”的反思

2.3.1 了解概念的基本要素,找到“推知”活动的切入点

概念的要素涉及四个方面:名称,例证,属性和定义. 例证包括正例和反例,正例有利于确证概念的本质属性,反例有助于剔除概念的非本质属性. 中学数学概念的定义方法主要有原始概念、属加种差定义法及揭示外延定义法. 属加种差定义法是最常用的定义方式,邻近属概念往往是上位概念,发现邻近属概念就找到了学习的起点,而发现种差的过程,也是“推知”概念的过程.

2.3.2 掌握概念学习的基本规律,在“推知”活动中发展学生思维品质

概念学习的过程包括概念的获得和概念的运

万方数据

用两个环节. 获得概念有两种形式,即概念的形成和概念的同化. 按照概念的抽象水平,概念又有具体概念和定义性概念之别. "线面垂直"是具体概念,因此适宜采用概念形成策略,即从例证的辨别出发,然后逐渐发现概念的本质属性. 用概念形成方式获得具体概念,一般要经过知觉辨别、假设、检验假设和概括四个阶段. 一般而言,具体概念越复杂,检验和假设之间的往复次数越多. 在这个过程中,越需要从外界寻找更多的正例和反例. 概念形成属于发现学习的范畴,它的关键是必须感知到充分的正例和反例,然后加上适当的概括.

3 定理"推知"

给概念下定义后,探寻其判定定理,是数学研究的常规. 因此有了"线面垂直"定义,可推知"线面垂直"的判定条件并证明.

3.1 判定定理的合情猜想

3.1.1 "线面垂直"结构的推测片段

师:显然,有了"线面垂直"的定义,证明直线与平面不垂直非常简单. 怎样证明?

生齐:举一个反例.

师:对,在平面上找一条直线,证明直线与平面的这条直线不垂直即可. 但用定义直接证明直线与平面垂直不易,于是寻找便于操作的"线面垂直"的判定条件是数学研究的常态,也是今天我们的任务. 结合前面学习的"线面平行""面面平行"的判定定理的结构,你能推测出判定"线面垂直"的结构吗?

生1:"线面平行"判定定理的条件是"线线平行",结论是"线面平行";"面面平行"判定定理的条件是"线面平行",结论是"面面平行";所以我推测"线面垂直"判定定理的条件是"线线垂直",结论是"线面垂直".

生2:其实由刚刚学习的"线面垂直"定义,也能推测出判定"线面垂直"的条件可以转化为"线线垂直",问题是直线要和平面上的多少条直线垂直,才能判定"线面垂直"?

师:同学们的分析都很到位,推测都揭示了解决立体几何问题的一个重要的思想方法,前面提到过,还记得吗?

生齐:立体向平面转化.

师:对,高维—立体向低维—平面转化.

3.1.2 "线面垂直"判定条件的猜想片段

师:生2提出了一个好问题,如果"线线垂直"的第一条"线"指的是平面外的"直线";第二条"线"指的是平面内的"直线",那么平面内的直线需要多少条与第一条平面外直线垂直就够了?平面内的这些直线还需要什么条件?提出你的猜想(请不要看书),并说明猜想的依据.

生3:类比"线面平行"判定定理条件,猜想判断条件是"直线与平面内的一条直线垂直",但是刚才实验(斜立在桌面上的直角三角板),已经证明这个猜想是错误的.

师:虽然猜想的结论不对,但类比"线面平行"判定定理,猜想的角度是合理的. 而且生3还通过反例证明了猜想是错的.

生4:我猜想判断条件是"直线与平面内的两条相交直线垂直",理由是面面平行的判断条件就是找到平面内的"两条相交直线"与"另一个平面平行".

师:很好的联想. 还能进一步说明猜想的理由吗?

生4:两条相交直线确定平面,所以……

师:这个理由让你的猜想更充分了,还有其他猜想吗?

生5:我提出一个猜想:"直线与平面内的两条平行直线垂直",猜想依据是"两条平行直线确定一个平面". 但这个判断条件也是不对的,因为斜立在桌面上的直角三角板……

师:这个猜想也有根有据,不过生5自举了反例证明猜想不正确.

3.2 判定定理的演绎证明

在《普通高中数学课程标准(实验)》(2003年)中,线面、面面平行及垂直的判定(必修2)都仅要求通过直观感知、操作确认,归纳得出,相关证明只作为"空间向量的应用"(选修2-1)提出. 所以"线面垂直"判定定理,比如,A版教材通过"折三角形纸片"的活动引入,B版教材由两条相交直线确定平面原理引出定理,在立体几何中都没有证明.

《普通高中数学课程标准(2017年版)》对线面、面面平行和垂直的关系的要求与2003版的要求基本一致,在必修主题三课程提出:借助长方体,通过直观感知,了解空间中线面、平面的平行

万方数据

和垂直的关系，归纳出判定和性质定理[8].

“课程标准”从全局考虑，顶层设计，对判定定理没有要求从立体几何出发的演绎证明，是可以理解的. 但对于掌握了一定演绎证明的学生而言，充分利用这一资源开发为校本课程是值得提倡的.

利用对称的方法，教材[9]给出“线面垂直”判定定理的详细分析(没有证明)，教材[10]在证明前给出了简单分析. 文献[11]考察了 20 世纪中叶之前的 97 种西方立体几何教科书中的线面垂直判定定理的证明方法，指出：证明的讲解对于学生逻辑推理素养的培养具有一定的价值.

关于“线面垂直”判定定理证明的教学，我们的立场是不仅学习定理怎样证明的，以确认定理的正确性，加深对定理的理解，而且关注定理证明过程中逻辑推理素养的发展.

3.2.1 符号图形语言的翻译

为了快捷顺畅，不少教师往往直接给出命题的图形和已知求证. 对学生前测调研，统计结果已表明，缺少文字语言、符号语言与图形语言互译训练的学生，当没有提示，特别是无图形语言，他们茫然不知所措.

将猜想命题翻译成符号语言与图形语言，是强化命题理解的一种手段，也是证明的起点. 因此将命题翻译成符号语言与图形语言的任务交由学生，教师只要适量点拨即可.

3.2.2 利用定义证明的含义

利用定义证明“线面垂直”判定定理，就是要证明与平面 α 的两条相交直线 m、n 垂直的直线 l，与平面 α 的任意一条直线垂直. 有两个值得学生思考的问题：(1)怎样表示平面 α 的任意一条直线；(2)这条任意直线在什么位置. 问题 1 旨在让学生学会“(不妨)设 g 是平面 α 内的任一直线”的表达，体验“无中生有”的妙处. 问题 2 意在让学生能根据已知条件，学习恰当分类. 因为平移不破坏直线与直线的垂直关系，所以简单而有价值的分类就是直线 g 过或不过直线 m、n 的交点.

3.2.3 对称方法证明的起意

实践中，学生对教材[9]的证明能够理解，如果仅止于对证明听得清、看得懂上，那只是完成了知识的传授和定理的确认，定理证明教学更有意义的是怎样启迪学生找到证明的突破口和路径，怎样用数学的语言逻辑地清晰表达.

由于直线 l 的不确定性，平面 α 内直线 g 的任意性，以及平移不改变直线与直线的垂直关系，于是分类证明 $l\perp g$ 的想法应运而生. 先证明 l、g 过 m、n 交点的特殊位置情形，其它情形通过平移转化.

平面内解决两线的垂直问题，学生学过等腰三角形的三线合一定理、线段垂直平分线的逆定理，以及圆周角的推论(直径上的圆周角)、垂径定理的推论(平分弦(非直径)的直径). 后两者需要构造圆(可不考虑)，而前两者就是构造对称. 因此唤醒学生已有的经验，用对称方法证明 $l\perp g$ 就成为自然选择.

3.3 定理“推知”的反思

虽然学生在教师的引导下，可以猜想出线面垂直的判定定理，但是由与平面内任意一条直线都垂直，到只须与平面内两条相交直线垂直，巨大反差的结果令学生有兴趣证明真伪. 如果此时偃旗息鼓，直接承认判定定理，学生求知和探索的欲望将得不到满足，也错失了一次演绎推理的训练和科学精神的弘扬.

事实上，由“面面平行”和平面内的线线垂直做铺垫，“线面垂直”判定将合情推理与演绎推理有机结合顺理成章. 通过演绎证明，学生领略了无限向有限转化、空间向平面转化、分类讨论等数学思想方法，拓宽了对称概念(点、线到面)，感受了公理化、逻辑证明的魅力，经历了言之有理、论证有据的逻辑推理过程. 同时“线面垂直”的判定定理证明后，还可以探讨与“线面垂直”定义等价性等问题.

4 “推知”效应

通过“推知”教学实践，我们感受到如下几点效应：

(1)易于激发动机

有方向的“推知”，使学生对所学材料的探究具有兴奋感和自信感，这样就可能把发现本身作为一种自我奖赏而推动自己的学习活动，这样的力量是真正的内在学习动机.

(2)助于保持记忆

布鲁纳认为，人类记忆的首要问题不是储存而是检索，而检索的关键在于组织，也就是知道到

(下转第 31 页)

万方数据

的绝不用两个素材，让每一个教学素材都能精准地服务于教学目标、教学任务；适当改造教学素材，在不改变教学素材背景的前提下变换其蕴含的内容与思想，节省学生熟悉素材的时间，做到一“材”多用. 比如“直线的倾斜角和斜率”这节课，用“坡度比”引出“直线的斜率”，显得突然且杂乱，因此教学中没有采用这个素材，转而通过探索“直线上任意两点的坐标”与“直线的倾斜角 α”关系引出斜率的定义.

3.3 明确“怎么教”

课堂教学由很多教学环节组成，比如知识引入、提出问题、自主探究（或交流讨论）、解决问题、归纳反思等，不同的课型有不同的教学环节，课堂教学的有效实施，离不开教学环节的合理选取和恰当应用，繁琐复杂的教学环节浪费了课堂教学时间，直接影响到一节课的教学节奏，与简约自然的数学教学格格不入. 简约自然理念下的数学教学，必须综合考虑教学任务、内容特点以及学情，科学合理地拟定教学环节，让每一个教学环节都发挥其价值与功用，即明确“怎么教”. 要充分考虑问题提出、学生思考、师生交流、教师讲解等教学环节的实效性，略去低效、无效或重复的教学环节，甚至对交叉的教学环节进行整合，让每个教学环节简约出现、高效使用；要对每个教学环节所花的时间进行合理调整，真正做到用时简约得当；切实设计环节与环节之间的过渡语言，让环节之间的过渡显得自然，使由多个环节组成的课堂成为有机的整体. 比如“直线的倾斜角和斜率”这节课，把斜率定义的教学环节与探究斜率公式的教学环节进行整合，教学过程简约自然，节省课堂教学时间，提高了课堂教学效率.

当然，“简约”与“自然”都具有其本真性，而不是人为的“简约自然”，切不可追求人为的“简约”而省去一些重要的教学任务，舍去一些优质的教学素材，略去一些关键的教学环节；也不可追求人为的“自然”而生搬硬套、矫情造作；更不可过度地追求形式化的“简约自然”，从而丢失知识本质、课堂本真.

（上接第 27 页）

哪里寻找信息和怎样去获取信息. 一般而言，按照一个人自己的兴趣和认知结构组织起来的材料就是最有希望在记忆中自由出入的材料，而“推知”得到的知识多半是遵循着与个人的智慧航向相联系的路线安置，自然形成知识的网络结构.

(3)利于涵养逻辑推理的素养

为学生提供合情推理的时机，并在交流中“推度以自悟”和“说明以悟他”. 不仅理解了知识技能的由来，而且在过程中锻炼了思维，学生的逻辑推理素养也会在长期的“推知”活动中悄然发展.

(4)益于养成数学思考的习惯

将“推知”贯穿到数学学习中，就越能把学习所得归结成一种解决问题或研究的方式，而这种方式对学生遇到的任何新的学习内容都有裨益的.

当然，“推知”活动要适度，因为只有具备“推知”的能力（主观条件），又有“推知”的欲望（内在动机），才能实现“推知”的效益. 所以，系统和持续地创设学生最近发展区内的“推知”活动是关键. 另外，这种“推知”学习，应该是在阅读教材之前，也可和阅读教材交错.

参考文献

[1]中华人民共和国教育部制定. 普通高中数学课程标准(2017年版)[M]. 北京：人民教育出版社，2018：5

[2]卢芸蓉. 伍非百. 对《墨经》知识论的研究[J]. 思想战线，2011，37(05)：141－142

[3]李匡武. 中国逻辑史(先秦卷)[M]. 兰州：甘肃人民出版社，1989：197

[4]詹剑峰. 墨家的形式逻辑[M]. 武汉：湖北人民出版社，1956：72，74

[5]钱爽.《墨经》“知源”之“三款六式”框架新解[J]. 新视野，2015(05)：104－110

[6]人民教育出版社课程教材研究所. 普通高中课程标准实验教科书数学必修 2(A 版)[M]. 北京：人民教育出版社，2007：54

[7]人民教育出版社课程教材研究所. 普通高中课程标准实验教科书数学必修 2(B 版)[M]. 北京：人民教育出版社，2007：48

[8]中华人民共和国教育部制定. 普通高中数学课程标准(2017年版)[M]. 北京：人民教育出版社，2018：28－29

[9]人民教育出版社中学数学室. 全日制普通高级中学教科书(必修)数学第二册(下 B)[M]. 北京：人民教育出版社，2006：23

[10]人民教育出版社中学数学室. 全日制普通高级中学教科书(必修)数学第二册(下 A)[M]. 北京：人民教育出版社，2004：21－22

[11]沈中宇，汪晓勤. 20 世纪中叶以前西方几何教科书中的线面垂直判定定理[J]. 中学数学月刊，2017(01)：44－47

万方数据