师在教育教学中对学生多年的培养.素养两个字,"素"指平时、平常;"养"指历练、修行,积微成著地养功夫.两个字合起来对于我们教师来说,指明了我们平时应该做什么事,应该怎么做[12].数学知识是数学问题解决的工具,数学学科核心素养的培养是在数学学习和运用数学学科知识解决数学问题的过程中进行的.教师要认识数学学科知识的考查工具功能,理解学科知识的要求、呈现方式、呈现特点和教学功能,以发展学生学科核心素养为导向,将宏观的核心素养体系落实到数学学科核心素养的培育上和具体的每一节数学课堂中,在教学中创设合适的问题情境,通过适当的活动促进学习的发生,努力揭示数学定义、法则、结论的发生、发展过程和本质,在数学知识的学习中"掌握理论、融会贯通、勇于探索、善于分析、勤于思考、科学思维",以学科知识为工具,培养从"解题"到"解决问题"的能力,在学习数学和应用数学的过程中不断发展数学学科核心素养.

参考文献

[1] 教育部考试中心.中国高考评价体系[M].北京:人民教育出版社,2019.

[2] 教育部考试中心.中国高考评价体系说明[M].北京:人民教育出版社,2019.

[3] 姜钢.发挥高考内容改革导向作用,助力推进教育评价改革[J].中国考试,2019(6):1-4.

[4] 张定强,郭蔚.高中数学教育教学研究2019年度综述——基于2019年《复印报刊资料·高中数学教与学》转载论文情况的分析[J].中学数学杂志,2020(3):63-封底.

[5] 任子朝,赵轩.基于高考评价体系的数学科考试内容改革实施路径[J].中国考试,2019(12):27-32.

[6] 林运来,杜锟.注重核心素养 引领数学改革——2013-2016年高考数学全国卷试题综述[J].中学数学教学参考(上),2016(10):46-49.

[7] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017年版)[S].北京:人民教育出版社,2018.

[8] 赵轩,任子朝,陈昂.高考数学科批判性思维考查研究[J].数学通报,2019(12):38-42.

[9] 于涵.新时代的高考定位与内容改革实施路径[J].中国考试,2019(1):1-9.

[10] 林运来.促进全面发展 落实评价体系 引领教学改革——2019年高考数学全国卷试题评析[J].数学通报,2019(12):43-47,53.

[11] 祁平,任子朝,赵轩.指明改革方向 绘就培养蓝图——高考评价体系育人视角的解读与应用[J].数学通报,2020(4):1-6,23.

[12] 刘怀乐.例谈化学教师的科学素养[J].中学化学教学参考(上),2015(12):1-4.

以简驭繁 以小胜大

——2020年浙江高考第9题在高一的教学体验

杭州绿城育华学校 310000 张旭强

【摘 要】 对同一个数学问题的学习,不同阶段的学生会产生不同的学习效果,笔者将2020年浙江高考的一个选择题在高一学生中进行了教学尝试,得到了较好的反馈,教师带领学生回归认知的原点,学生从已有的认知出发,以简驭繁.文章也对此题进行了解法分析.

【关键词】 高中数学;高考;以简驭繁

数学教育培养学生的数学核心素养,是超越具体数学内容的数学教学目标[1].笔者认为为了实现这样的教学目标教师在数学教育中要遵循一个原则,把握数学知识的本质,这个本质可以理解为要从本源上去对知识进行再认知,即回归知识的原点,弄清每个概念、知识和技能背后的原理.在教学中,教师第一考虑的不应是数学教学内容、技能的多少,而应是如何引导学生从更本源上去认识数学.

高考试题是数学教师重点研究的对象,笔者发现2020年浙江高考第9题,与最近在高一课堂讲解的两题有异曲同工之妙,表面上考查一个三次函数图象性质,实际可以利用"同正异负"原理来阐述.

题1 (2020年浙江高考第9题)已知$a,b\in\mathbf{R}$,且$ab\neq0$对于任意$x\geqslant0$均有$(x-a)(x-b)(x-2a-b)\geqslant0$,则( ).

A.$a<0$ B.$a>0$ C.$b<0$ D.$b>0$

解法1 用"二次+一次"驾驭"三次函数"

令$f(x)=(x-a)(x-b)$,$g(x)=x-2a-b$,先

考查$f(x)=(x-a)(x-b)$,若$a>b$,分$0<b<a$,$b<0<a$,$b<a<0$三种情况讨论,若$a<b$,分$0<a<b$,$a<0<b$,$a<b<0$三种情况讨论,

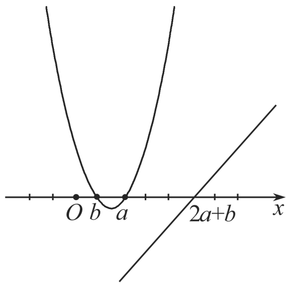

图 1

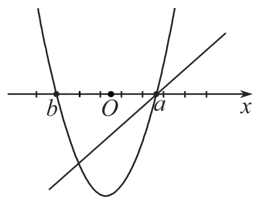

图 2

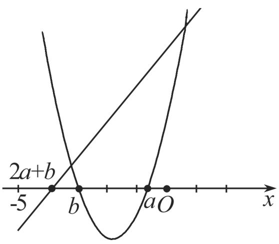

图 3

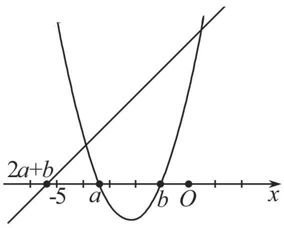

图 4

若$a>b$讨论:当$0<b<a$时,如图1,不满足题意舍去,当$b<0<a$时,如图2,则$2a+b=a$,即$a+b=0$,$a>0$,$b<0$,满足题意;当$b<a<0$时,如图3,则$b<a<0$,$2a+b<0$,满足题意;若$a<b$讨论,如上,可知只有当$a<b<0$时,如图4,则$a<b<0$,$2a+b<0$满足题意.

所以选 C.

解法 1 将题中的三次函数图象问题转化为二次函数与一次函数图象问题,以简驭繁,以小胜大.这样的分析似乎很巧妙,但笔者仔细一想似乎可以将解法 1 进一步优化,得到下面的解法 2.

解法 2　用"一次 + 二次"驾驭"三次函数"

令$f(x)=x-a$,$g(x)=(x-b)(x-2a-b)$,注意到函数$g(x)=(x-b)(x-2a-b)$的图象可以由$h(x)=x(x-2a)$的图象向右平移b个单位得到,函数$y=f(x)$的图象为过$(a,0)$点,斜率为1的一条直线,如图5、图6.

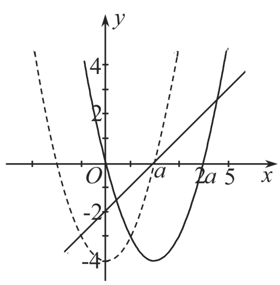

图 5

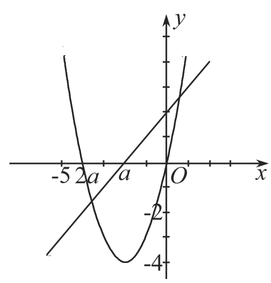

图 6

根据题意,$y=f(x)$函数图象为一确定的直线,要使得在$x\geqslant 0$,$f(x)\cdot g(x)\geqslant 0$恒成立.

若$a>0$,如图5,将二次曲线$y=g(x)$图象向左平移,且经过点$(a,0)$,题设命题恒成立,即$a=-b$,所以$-b>0$;

若$a<0$,如图6,将二次曲线$y=g(x)$图象向左平移任意单位,题设命题恒成立,即$-b>0$,所以选 C.

解法 3　用三个"一次"驾驭"三次函数"

令$f(x)=x-a$,$g(x)=x-b$,$h(x)=x-2a-b$,要满足题意则三式均大于等于0,或者两式小于等于0且一式大于等于0,当三式均大于等于0时,$\begin{cases}x-a\geqslant 0,\\x-b\geqslant 0,\\x-2a-b\geqslant 0,\end{cases}$可得$x\geqslant\max\{a,b,2a+b\}$恒成立,又由$x\geqslant 0$,所以要满足题意,只有$\max\{a,b,2a+b\}\leqslant 0$成立,得到$a<0$,$b<0$.

当两式小于等于0一式大于等于0时,此时不妨设$a\geqslant b$,则$b\leqslant a\leqslant 2a+b$,根据题意,在$x\geqslant 0$时,若$(x-a)(x-b)(x-2a-b)\geqslant 0$恒成立,则$\begin{cases}x-b\geqslant 0,\\x-a\leqslant 0,\\x-2a-b\leqslant 0,\end{cases}$在此约束条件下生成的不等式一定不可以存在上确界,故必须$a=2a+b$,即$a+b=0$,得到$a>0$,$b<0$,综上所述$b<0$,所以选 C.

以上三种解法,笔者认为教师跨过了学生比较陌生的三次函数图象问题,用学生更加熟悉的一次、二次函数图象性质来解决高三学生高考当中的一个难题,以简驭繁,以小胜大,可谓妙哉.

解题至此,笔者因为今年在高一教学,想到一高一期末考试题:题 2.

题 2　若不等式$(|x-a|-b)(2x-x^2)\leqslant 0$对任意实数$x$恒成立,则$a+b=$(　　).

A. -1　　B.0　　C.1　　D.2

对于此题,高一学生最常规的思路是利用初中所学"两数相乘(除)同号为正,异号为负",根据此不等式,将函数$f(x)=(|x-a|-b)(2x-x^2)$拆分为两个函数$g(x)=|x-a|-b$与$h(x)=2x-x^2$,若要满足题意,根据函数图象特点$y=g(x)$为一开口向上的"V"字型图象,$y=h(x)$为一开口向下的抛物线,若要满足对任意实数x,$g(x)\cdot h(x)\leqslant 0$恒成立,只有当$y=g(x)$图象如图7时,此时$a=1$,$b=1$,所以选 D.

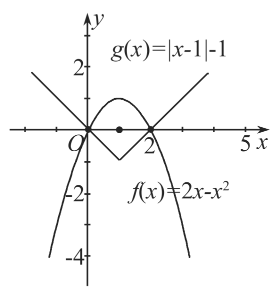

图 7

讲解此题时,作为拓展,笔者又补充了题3.

题3 若不等式 $(a-|x-b|)\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 0$,对 $x\in[0,2\pi]$ 恒成立,则 $\sin(a+b)$ 和 $\sin(a-b)$ 分别等于( ).

A. $\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}$

学生通过“两数相乘(除)同号为正,异号为负”的原理,借助函数图象分析,得出答案D.

高考完后,笔者将题1在高一学生中进行了操练,也许是因为有了之前题2、题3的分析讲解,大部分学生能用将这个三次函数分解成两个函数的方法处理此题,并得出正确答案.笔者做了初步统计,全教学班30人,正确人数22人,笔者认为高一的学生能有这样的正确率还是不错的.

对于题1、题2、题3,采用“两数相乘(除)同号为正,异号为负”原理的解法似乎在浙江高考解题中屡见不鲜.

题型1 已知“$f(x)\cdot g(x)>0$ 或 $f(x)\cdot g(x)<0$”求参数值.

题4 (2012年浙江理17)设 $a\in\mathbf{R}$,若 $x>0$ 时均有 $[(a-1)x-1](x^2-ax-1)\geqslant 0$,则 $a=$ ______.

分析 当 $x>0$ 时,此三次函数要大于0恒成立,将此三次函数看成一个一次函数 $f(x)=(a-1)x-1$ 与一个二次函数 $g(x)=x^2-ax-1$ 的乘积,因为二次函数值当 x 趋向正无穷时大于0,所以一次函数必单调递增即 $a>1$,可画图8,

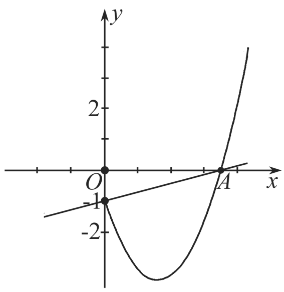

图8

且此一次函数图象必过图中点 A,即 $g\left(\frac{1}{a-1}\right)=0$,代入运算 $\left(\frac{1}{a-1}\right)^2-\frac{a}{a-1}-1=0$,可得 $a=\frac{3}{2}$.

此题通过判断函数值正负,根据“同正异负”原理,确定函数图象的唯一性,进而确定参数的大小.

题型2 构造函数 $f(x)\cdot g(x)$ 或 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 判断其与0的大小关系.

题5 (2016年浙江文20)设函数 $f(x)=x^3+\frac{1}{x+1}$,$x\in[0,1]$,证明:$f(x)\geqslant 1-x+x^2$.

分析 要证此不等式可证 $f(x)-(1-x+x^2)$ 与0的大小关系,通过整理成 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 型,分子分母分别与0比较大小.

证明 $f(x)-(1-x+x^2)=x^3+\frac{1}{x+1}-1+x-x^2=\frac{x^3(1+x)+1-(1+x)(1-x+x^2)}{x+1}=\frac{x^3(1+x)+1-(1+x^3)}{x+1}=\frac{x^4}{x+1}$.

因为 $x\in[0,1]$,所以 $x^4\geqslant 0$,$x+1>0$,$\frac{x^4}{x+1}\geqslant 0$,即 $f(x)\geqslant 1-x+x^2$ 成立.

题6 (2019年浙江22)已知实数 $a\neq 0$,设函数 $f(x)=a\ln x+\sqrt{x+1}\ (x>0)$,若对任意 $x\in\left[\frac{1}{e^2},+\infty\right)$ 均有 $f(x)\leqslant\frac{\sqrt{x}}{2a}$,求 a 的取值范围.

分析 在解题过程中需要判断函数 $P(x)=\frac{2\sqrt{x}\sqrt{x+1}-\sqrt{2}x-\sqrt{x+1}}{x\sqrt{x+1}}$ 与0的大小关系,当直接判断有困难时,可以用本文所提的“同正异负”的本质去分析.将 $P(x)$ 配凑成几个式子乘积或商的形式,即 $f(x)\cdot g(x)$ 或 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 型.因为根据对 $2\sqrt{x}\sqrt{x+1}-\sqrt{2}x-\sqrt{x+1}=0$ 试根,发现 $x=1$ 为此方程的一个根,所以必含有 $x-1$ 或 $\sqrt{x}-1$ 因式.这就为后续的函数整理指明了方向.

$$
\begin{aligned}
&2\sqrt{x}\sqrt{x+1}-\sqrt{2}x-\sqrt{x+1}\\
&=\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{2x}\right)+\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x}-1\right)\\
&=\frac{\sqrt{x}(1-x)}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x}}+\frac{\sqrt{x+1}(x-1)}{\sqrt{x}+1}\\
&=(x-1)\frac{\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}x)-\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x})}\\
&=\frac{(x-1)[1+\sqrt{x}(\sqrt{2x+2}-1)]}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x})},
\end{aligned}
$$

到了这一步,我们就可以用“同正异负”的本质去判断 $P(x)\geqslant P(1)=0$,这个题的具体解法,这里就不展开了.

再来看一个今年某校自主招生的压轴解答题,“两数相乘(除)同号为正,异号为负”原理为解题指明方向,以简驭繁.

题7 (2020年中科大自主招生10)已知函数 $f(x)=x^3+ax^2-x+1-a$,若对 $\forall x\in[-1.1]$,$|f(x)|\geqslant|x|$ 恒成立,求实数 a 的取值范围.

分析 此题 $|f(x)|\geqslant|x|$ 等价于 $f^2(x)\geqslant x^2$,可

以转化为$[f(x)-x][f(x)+x]\geqslant 0$，即本文中的$f(x)\cdot g(x)$型，然后根据两数相乘“同正异负”的本质与0判断大小.

解　因为$|f(x)|\geqslant|x|$所以$[f(x)-x][f(x)+x]\geqslant 0$，即$(x^3+ax^2+1-a)(x^3+ax^2-2x+1-a)\geqslant 0$在$x\in[-1,1]$上恒成立.又有当$x=0$时式子恒成立，下面考虑$x\in(-1,0)\cup(0,1)$的情况：

通过试根，可以将式子进一步整理，这是本题最关键一步，分解为$f(x)\cdot g(x)$型，可以更好地判断整个式子与0的大小关系.

$$原式=x^2(x-1)(x+1)\left(x+\frac{1-a}{x}+a+1\right)\left(x-\frac{1-a}{x}+a+1\right)=\left(\frac{x^2-x+1}{x-1}+a\right)\cdot\left(\frac{x^2+x-1}{x+1}+a\right)$$，至此，再将原式看成a为主元的函数.

因为$x\in[-1,1]$，所以$\frac{x^2-x+1}{x-1}=x-1+\frac{1}{x-1}+1\in(-\infty,-3]$；$\frac{x^2+x-1}{x+1}=x+1+\frac{1}{x+1}-1\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$.

根据同正异负分析要原命题恒成立，

则$\frac{1}{2}+a\leqslant 0$，即$a\leqslant-\frac{1}{2}$.

行文至此，笔者想说看题1、题4两个高考原题，都是考查三次函数恒成立的问题，虽解法众多，但笔者想强调的是，出卷者为何如此给出这个函数的形式：即都是一个二次函数与一个一次函数的乘积.似乎这是出卷者的好意，有意让考生从两数相乘“同正异负”本质角度出发思考答题，我们不妨顺着这样的“好意”去思考.所以有了本文的解法一、二、三.

当然解2020高考第9题，笔者还有以下几种解法.

解法4　奇穿偶回

根据三次函数图象特点，本题函数图象为“一波三折”型[2]，若满足题意则只有以下两种情形：

如图9，满足题意需要$a,b,2a+b$三个数都小于0；

如图10，满足题意需要$a,b,2a+b$三个数中有一个小于0，两个大于0且相等.

接下来讨论若a,b大于0且相等，则$2a+b$也必然大于0，不满足，舍去；

若$b,2a+b$大于0且相等，根据$b=2a+b$解得$a=0$，根据题意$ab\neq 0$，不满足，舍去；

若$a,2a+b$大于0且相等，根据$a=2a+b$解得$a=-b$，根据题意可得图10，满足，此时$b<0$.综上所述，根据选项可得C为最佳答案.

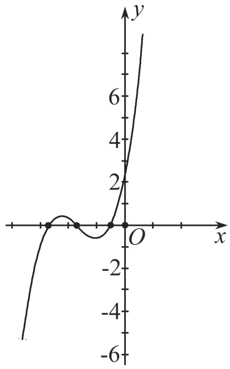

图9

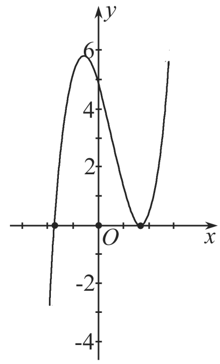

图10

在前面“同号为正异号为负”本质的基础上，笔者先带领学生将二次函数的图象从本质出发进行分析，然后到三次函数图象，虽然高一的学生没有接触导数，不会判断函数的增减性，但学生可以根据零点附近函数值的正负来判断图象的位置得出“奇穿偶回”图象画法.

解法5　特值法

只需让a,b分别取大于0与小于0的值进行验证即可，我们不妨设$a,b\in\{-1,1\}$.

当$a=b=-1$时，$f(x)=(x+1)(x+1)(x+3)\geqslant 0$，在$x\geqslant 0$一定成立；

当$a=1,b=-1$时，$f(x)=(x-1)^2(x+1)\geqslant 0$，在$x\geqslant 0$一定成立；

当$a=-1,b=1$时，$f(x)=(x-1)(x+1)^2\geqslant 0$，在$x\geqslant 0$不一定成立.所以选C.

解法6　排除法

函数$f(x)=(x-a)(x-b)(x-2a-b)$有三个零点$a,b,2a+b$且$ab\neq 0$，若$a=b>0$，则$2a+b=3a>0$，此时函数$f(x)=(x-a)^2(x-3a)$对于$x\geqslant 0$，显然不成立，排除B、D.若$a=b<0$时，对于$x\geqslant 0$，$f(x)\geqslant 0$恒成立，若$a=1,b=-1$则$2a+b=1$，此时函数$f(x)=(x-1)^2(x+1)$满足题意，排除A.所以选C.

解法7　必要先行

取$x=0$，则根据题意要有$ab\cdot(2a+b)\leqslant 0$恒成立，若$a>0$，则要有原命题成立则需$b(2a+b)\leqslant 0$成立，则$b<0$，若$a<0$，则要有原命题成立则需$b(2a+b)\geqslant 0$，当$b<0$时，显然成立，所以选C.

因为本文选择的角度是以简驭繁，笔者就不对此题的其它解法进行一一赘述.基础数学的本质是精简朴实的，它们的根源都是自然而富有直观的内涵，高考题目也是如此[3].

做完这几个题后笔者再进行反思，高次函数可

以用奇穿偶回来绘制函数图象,从新课标中的理解运算对象,掌握运算法则[4] 的要求出发,如何来理解高次函数图象的“奇穿偶回”呢?

回归奇穿偶回的本源,其本质就是“两数相乘(除)同号为正,异号为负”,对于本文中的题采用的情形是 $f(x)=h(x)\cdot g(x)$,x_1 是函数 $h(x)$ 的 n_1 重零点,x_2 是函数 $g(x)$ 的 n_2 重零点,若 n_1 是偶数,则函数 $f(x)$ 的图象在 x_1 处呈现“回”的现象,若 n_2 是奇数,则函数 $f(x)$ 的图象在 x_2 处呈现“穿”的现象.简言之,奇穿偶回的本源是初中阶段的“同正异负”,这个本源对于高一的学生而言是简单的,它是学生认知高次函数图象的知识原点.学生通过这样的回归原点,可以为后续探究“奇穿偶回”绘制高次函数图象,甚至其它数学知识的学习明晰方向,为更高层次的数学学习提供保障.

现阶段学生很多数学学习是大量刷题,归纳题型模式解题,不会从概念理解的角度去分析问题.教师在教学中若都能回归知识的原点,帮助学生弄清每个概念、知识和技能背后的原理,找准知识的本源,把握数学的本质,就可以做到以简驭繁.经历了这样的学习过程,学生在数学知识理解的准确性,理解的深度、广度,应用的灵活性等方面都会有质的提升;当然提升的还有具体问题分析的习惯.进而达到数学教育所要求的有效提升学生的数学核心素养.

参考文献

[1] 史宁中.高中数学核心素养的培养、评价及教学实施[J].中小学教材教学,2017(5).

[2] 张旭强.取势、明道、优术:立意素养的高中数学习题讲解三层次[J].中学数学月刊,2020(3).

[3] 朱成万,王红权.至精至简的高中数学思想方法[M].杭州:浙江大学出版社,2019.

[4] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017版)[S].北京:人民教育出版社,2018.

作者简介 张旭强(1983—),男,浙江杭州人,中学一级教师,长期在高中一线教学,撰写论文获得浙江省杭州市一等奖,独立完成两个杭州市级小课题,杭州市高中数学新锐教师班学员,研究方向:高中数学教学.

多视角解析一道 2020 年高考数学客观性压轴题

四川省资阳市外国语实验学校 641300 蔡勇全

1 试题再现与反馈

已知 $5^5<8^4$,$13^4<8^5$,设 $a=\log_5 3$,$b=\log_8 5$,$c=\log_{13}8$,则( ).

A.$a<b<c$ B.$b<a<c$

C.$b<c<a$ D.$c<a<b$

本题是 2020 年高考数学全国卷 Ⅲ 理科第 12 题,属于客观性压轴题.当本次高考全面落下帷幕后,笔者及时对所在地区的考生进行了广泛的访谈,大量考生对于本题的基本反应集中于:题目的文字固然简短,但基于试题所处的特殊位置及考场的氛围而引发的应试心理状态,部分考生出现了临场思维受阻现象,一时难以将个体认知结构中储备的各种“解题工具”进行有效提取,未能找到合适的比较与化归的突破口,从而使得本题的准确解答率较低,不少考生只能依靠连猜带蒙的方式胡乱选择一个答案,从而进一步拉低了本题的得分率.

2 多视角解析

视角 1 将已知及隐含的四组不等关系、不等式的性质、对数的运算性质相结合

一方面,易知 $3^4<5^3$,则 $\log_5 3^4<\log_5 5^3$,即 $4\log_5 3<3$,所以 $\log_5 3<\frac{3}{4}$,即 $a<\frac{3}{4}$;又易知 $5^4>8^3$,则 $\log_8 5^4>\log_8 8^3$,即 $4\log_8 5>3$,所以 $\log_8 5>\frac{3}{4}$,即 $b>\frac{3}{4}$,从而 $a<b$.

另一方面,因为 $5^5<8^4$,所以 $\log_8 5^5<\log_8 8^4$,即 $5\log_8 5<4$,则 $\log_8 5<\frac{4}{5}$,即 $b<\frac{4}{5}$;又因为 $13^4<8^5$,所以 $\log_{13}13^4<\log_{13}8^5$,即 $4<5\log_{13}8$,则 $\frac{4}{5}<\log_{13}8$,即 $c>\frac{4}{5}$,从而 $b<c$.

综上所述,$a<b<c$,故选 A.

评注 视角 1 在判断 a 与 b 的大小以及 b 与 c 的大小的过程中,总体上都用到了不等式的传递性,而在局部判断 a,b 与 $\frac{3}{4}$ 以及 b,c 与 $\frac{4}{5}$ 的大小关系时,则牢牢地抓住了对数的运算性质以及对数函数的单调性.此外,在判断 a,b 与 $\frac{3}{4}$ 的大小关系时,恰到好处地