

微专题 直线与圆

一、课前热身

1. 已知点 $A(0,1)$ ，直线 $l: y = kx + m$ 与圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 交于 B, C 两点， $\triangle ABC$ 与 $\triangle OBC$ 的面积分别为 S_1, S_2 ，若 $S_1 \geq 2S_2$ 且 $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$ ，则 m 的取值范围是 _____.

2. 已知直线 $l: 2mx + (1 - m^2)y - 4m - 4 = 0$ ，若对任意 $m \in R$ 直线 l 都与某定圆相切，则定圆方程是 _____.

3. 已知圆 $O: (x + \cos \theta)^2 + (y - \sin \theta)^2 = 1$ ，直线 $l: y = kx$ ，下面四个命题：

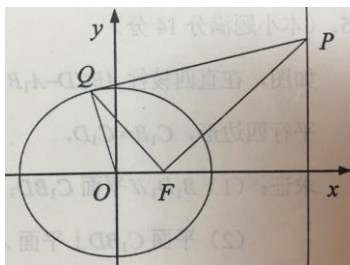
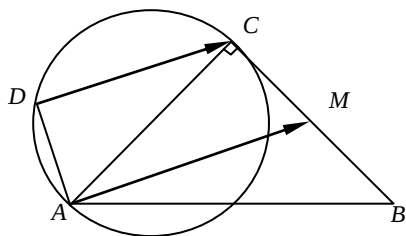
- (1) 对任意实数 k 与 θ ，直线 l 与圆 O 相切
 - (2) 对任意实数 k 与 θ ，直线 l 与圆 O 有公共点
 - (3) 对任意实数 θ ，必存在实数 k ，使得直线 l 与圆 O 相切
 - (4) 对任意实数 k ，必存在实数 θ ，使得直线 l 与圆 O 相切
- 其中真命题的序号是 _____.

二、温故知新

1. 如图，已知 $AC = BC = 4, \angle ACB = 90^\circ$ ， M 为 BC 中点， D 是以 AC 为直径的圆上任意一点，则 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DC}$ 的最小值是 _____.

2. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点分别为 F ， P 为右准线上一点， Q 在椭圆上，

$FQ \perp FP$ 在 x 轴上方存在 PQ 两点，使得 O, F, P, Q 四点共圆，求离心率的取值范围.



二、典例分析

例 1. 已知圆 $O: x^2 + y^2 = 1$, 正方形 $ABCD$ 的一边 AB 是圆 O 的弦, 求 OD 的最值.

$$[\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1]$$

例 2. 已知 A, B 为 $C: (x+4)^2 + (y-a)^2 = 16$ 上两个动点, 且 $AB = 2\sqrt{11}$, 若 $l: y = 2x$

上存在唯一的一个点 P 使得 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{OC}$, 则 a 的值为_____. 2 或 -18

例 3. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{3}$, 左焦点 F 到右准线 l 的距离为 10,

圆 $G: (x-1)^2 + y^2 = 1$.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 若 P 是椭圆上任意一点, 过点 P 作圆 G 的切线, 切点为 Q , 过点 P 作右准线的垂

线, 垂足为 H , 求 $\frac{PQ}{PH}$ 取值范围;

(3) 是否存在以椭圆上点 M 为圆心的圆 M , 使得过圆 M 上任意一点 N 作圆 G 的切线,

切点为 T , 都满足 $\frac{NF}{NT} = \sqrt{2}$? 若存在, 求出圆 M 的方程; 若不存在, 请说明理由.

$$(1) \text{由题意可得} \begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{1}{3} \\ \frac{a^2}{c} + c = 10 \end{cases}, \text{解得}$$

$$a = 3, c = 1, \therefore b^2 = a^2 - c^2 = 8.$$

$$\text{则椭圆方程为 } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1;$$

(2) 圆 $G: (x-1)^2 + y^2 = 1$ 的圆心在椭圆的右焦点上,

$$\therefore \left(\frac{PQ}{PH}\right)^2 = \frac{PG^2 - 1}{PH^2} = e^2 - \frac{1}{PH^2}$$

$$\because e = \frac{1}{3}, PH \in \left[\frac{a^2}{c} - a, \frac{a^2}{c} + a\right] = [6, 12]$$

$$\therefore \left(\frac{PQ}{PH}\right)^2 \in \left[\frac{1}{12}, \frac{15}{144}\right] \text{ 则 } \frac{PQ}{PH} \in \left[\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{15}}{12}\right];$$

(3) 设圆 $M: (x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2 (r > 0)$ 满足条件, $N(x, y)$

,

其中点 (m, n) 满足 $\frac{m^2}{9} + \frac{n^2}{8} = 1$ 则

$$x^2 + y^2 = 2mx + 2ny - m^2 - n^2 + r^2$$

$$NF = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}, NT = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 - 1^2}$$

要使 $\frac{NF}{NT} = \sqrt{2}$ 即 $NF^2 = 2NT^2$, 即 $x^2 + y^2 - 6x - 1 = 0$

$$\text{代入 } x^2 + y^2 = 2mx + 2ny - m^2 - n^2 + r^2$$

得 $2(m-3)x + 2ny - m^2 - n^2 - 1 + r^2 = 0$ 对圆 M 上点

$N(x, y)$ 恒成立,

$$\text{只要使 } \begin{cases} m-3=0 \\ n=0 \\ r^2=m^2+n^2+1 \end{cases}, \text{得 } \begin{cases} m=3 \\ n=0 \\ r^2=10 \end{cases}, \text{经检验 } m=3, n=0$$

$$\text{满足 } \frac{m^2}{9} + \frac{n^2}{8} = 1,$$

故存在以椭圆上点 M 为圆心的圆 M , 使得过圆 M 上任意一点 N 作圆 G 的切线 (切点为 T)

都满足 $\frac{NF}{NT} = \sqrt{2}$, 圆 M 的方程为 $(x-3)^2 + y^2 = 10$.

三、巩固训练

1. 已知圆 $C_1: (x+\cos\alpha)^2 + (y+\sin\alpha)^2 = 4$, 圆 $C_2: (x-5\sin\beta)^2 + (y-5\cos\beta)^2 = 1$, $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$, 过圆 C_1 上任意一点 M 作圆 C_2 的一条切线 MN , 切点为 N , 则 $|MN|$ 的取值范围是 _____. $[\sqrt{3}, 3\sqrt{7}]$

2. 已知 $A(6, 2\sqrt{3}), B(8, 0), O$ 是原点, 圆 C 是 $\triangle OAB$ 的外接圆, 过点 $(2, 6)$ 的直线 l 被圆 C

所截得的弦长为 $4\sqrt{3}$ (1) 求直线 l 及圆 C 的方程 (2) 设圆

$N: (x-4-7\cos\theta)^2 + (y-7\sin\theta)^2 = 1 (\theta \in R)$, 过圆 N 上任意点 P 作圆 C 的两条切线

PE, PF , 切点是 E, F , 求 $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{CF}$ 的最大值

$$(x-4)^2 + y^2 = 16, x=2 \text{ 或 } 4x+3y-26=0, \frac{-16}{9}$$

3. 已知 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ 是非零不共线的向量, 设 $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{r+1}\overrightarrow{OA} + \frac{r}{r+1}\overrightarrow{OB}$, 定义点集

$$M=\left\{K\mid \frac{\overrightarrow{KA}\cdot \overrightarrow{KC}}{\left|\overrightarrow{KA}\right|}=\frac{\overrightarrow{KB}\cdot \overrightarrow{KC}}{\left|\overrightarrow{KB}\right|}\right\}.$$

(K 不在是直线 AB 上) 当

$K_1,K_2\in M$ 时, 若对于任意的 $r\geqslant 2$, 不等式 $\left|\overrightarrow{K_1K_2}\right|\leqslant c\left|\overrightarrow{AB}\right|$ 恒成立, 则实数 的最

小值为_____. $\frac{4}{3}$