2019 年全国高中数学联合竞赛一试（B 卷）
参考答案及评分标准

说明：

1. 评阅试卷时，请依据本评分标准. 填空题只设 8 分和 0 分两档；其他各题的评阅，请严格按照本评分标准的评分档次给分，不得增加其他中间档次.

2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，解答题中第 9 小题 4 分为一个档次，第 10、11 小题 5 分为一个档次，不得增加其他中间档次.

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分.

1. 已知实数集合 $\{1,2,3,x\}$ 的最大元素等于该集合的所有元素之和，则 x 的值为____________.

答案： -3.

解： 条件等价于 $1,2,3,x$ 中除最大数以外的另三个数之和为 0. 显然 $x<0$，从而 $1+2+x=0$，得 $x=-3$.

2. 若平面向量 $\vec{a}=(2^m,-1)$ 与 $\vec{b}=(2^m-1,2^{m+1})$ 垂直，其中 m 为实数，则 $\vec{a}$ 的模为____________.

答案： $\sqrt{10}$.

解： 令 $2^m=t$，则 $t>0$. 条件等价于 $t\cdot(t-1)+(-1)\cdot 2t=0$，解得 $t=3$.
因此 $\vec{a}$ 的模为 $\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$.

3. 设 $\alpha,\beta\in(0,\pi)$，$\cos\alpha,\cos\beta$ 是方程 $5x^2-3x-1=0$ 的两根，则 $\sin\alpha\sin\beta$ 的值为____________.

答案： $\dfrac{\sqrt{7}}{5}$.

解： 由条件知 $\cos\alpha+\cos\beta=\dfrac{3}{5},\ \cos\alpha\cos\beta=-\dfrac{1}{5}$，从而

$$(\sin\alpha\sin\beta)^2=(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)=1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta$$

$$=(1+\cos\alpha\cos\beta)^2-(\cos\alpha+\cos\beta)^2=\left(\frac{4}{5}\right)^2-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{7}{25}.$$

又由 $\alpha,\beta\in(0,\pi)$ 知 $\sin\alpha\sin\beta>0$，从而 $\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{\sqrt{7}}{5}$.

4. 设三棱锥 $P-ABC$ 满足 $PA=PB=3, AB=BC=CA=2$，则该三棱锥的体积的最大值为____________.

答案： $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

解： 设三棱锥 $P-ABC$ 的高为 h. 取 M 为棱 AB 的中点，则

$$h\le PM=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}.$$

当平面 PAB 垂直于平面 ABC 时，h 取到最大值 $2\sqrt{2}$. 此时三棱锥 $P-ABC$ 的体

积取到最大值$\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot 2\sqrt{2}=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{2}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$．

5. 将 5 个数$2, 0, 1, 9, 2019$按任意次序排成一行，拼成一个 8 位数（首位不为 0），则产生的不同的 8 位数的个数为__________．

答案：95．

解：易知$2, 0, 1, 9, 2019$的所有不以 0 为开头的排列共有$4\times 4!=96$个．其中，除了$(2, 0, 1, 9, 2019)$和$(2019, 2, 0, 1, 9)$这两种排列对应同一个数20192019，其余的数互不相等．因此满足条件的 8 位数的个数为$96-1=95$．

6. 设整数$n>4$，$(x+2\sqrt{y}-1)^n$的展开式中x^{n-4}与xy两项的系数相等，则n的值为__________．

答案：51．

解：注意到$(x+2\sqrt{y}-1)^n=\sum_{r=0}^{n}\mathrm{C}_n^r x^{n-r}(2\sqrt{y}-1)^r$．

其中x^{n-4}项仅出现在求和指标$r=4$时的展开式$\mathrm{C}_n^4 x^{n-4}(2\sqrt{y}-1)^4$中，其$x^{n-4}$项系数为$(-1)^4\mathrm{C}_n^4=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$．

而xy项仅出现在求和指标$r=n-1$时的展开式$\mathrm{C}_n^{n-1}x\cdot(2\sqrt{y}-1)^{n-1}$中，其$xy$项系数为$\mathrm{C}_n^{n-1}\mathrm{C}_{n-1}^2 4\cdot(-1)^{n-3}=(-1)^{n-3}2n(n-1)(n-2)$．

因此有$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}=(-1)^{n-3}2n(n-1)(n-2)$．注意到$n>4$，化简得$n-3=(-1)^{n-3}48$，故只能是$n$为奇数且$n-3=48$．解得$n=51$．

7. 在平面直角坐标系中，若以$(r+1, 0)$为圆心、r为半径的圆上存在一点(a, b)满足$b^2\ge 4a$，则r的最小值为__________．

答案：4．

解：由条件知$(a-r-1)^2+b^2=r^2$，故

$$4a\le b^2=r^2-(a-r-1)^2=2r(a-1)-(a-1)^2.$$

即$a^2-2(r-1)a+2r+1\le 0$．

上述关于a的一元二次不等式有解，故判别式

$$(2(r-1))^2-4(2r+1)=4r(r-4)\ge 0,$$

解得$r\ge 4$．

经检验，当$r=4$时，$(a, b)=(3, 2\sqrt{3})$满足条件．因此r的最小值为4．

8. 设等差数列$\{a_n\}$的各项均为整数，首项$a_1=2019$，且对任意正整数n，总存在正整数m，使得$a_1+a_2+\cdots+a_n=a_m$．这样的数列$\{a_n\}$的个数为__________．

答案：5．

解：设$\{a_n\}$的公差为d．由条件知$a_1+a_2=a_k$（k是某个正整数），则

$$2a_1+d=a_1+(k-1)d,$$

即$(k-2)d=a_1$，因此必有$k\ne 2$，且$d=\frac{a_1}{k-2}$．这样就有

$$a_n=a_1+(n-1)d=a_1+\frac{n-1}{k-2}a_1,$$

而此时对任意正整数 n，

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=a_1n+\frac{n(n-1)}{2}d=a_1+(n-1)a_1+\frac{n(n-1)}{2}d$$
$$=a_1+\left((n-1)(k-2)+\frac{n(n-1)}{2}\right)d,$$

确实为 $\{a_n\}$ 中的一项．

因此，仅需考虑使 $k-2\mid a_1$ 成立的正整数 k 的个数．注意到 2019 为两个素数 3 与 673 之积，易知 $k-2$ 可取 $-1, 1, 3, 673, 2019$ 这 5 个值，对应得到 5 个满足条件的等差数列．

二、解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

9.（本题满分 16 分） 在椭圆 Γ 中，F 为一个焦点，A, B 为两个顶点．若 $|FA|=3, |FB|=2$，求 $|AB|$ 的所有可能值．

解： 不妨设平面直角坐标系中椭圆 Γ 的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$，并记 $c=\sqrt{a^2-b^2}$．由对称性，可设 F 为 Γ 的右焦点．

易知 F 到 Γ 的左顶点的距离为 $a+c$，到右顶点的距离为 $a-c$，到上、下顶点的距离均为 a．分以下情况讨论：

(1) A, B 分别为左、右顶点．此时 $a+c=3, a-c=2$，故 $|AB|=2a=5$（相应地，$b^2=(a+c)(a-c)=6$，Γ 的方程为 $\frac{4x^2}{25}+\frac{y^2}{6}=1$）． ……………………4 分

(2) A 为左顶点，B 为上顶点或下顶点．此时 $a+c=3, a=2$，故 $c=1$，进而 $b^2=a^2-c^2=3$，所以 $|AB|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{7}$（相应的 Γ 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$）．

……………………8 分

(3) A 为上顶点或下顶点，B 为右顶点．此时 $a=3, a-c=2$，故 $c=1$，进而 $b^2=a^2-c^2=8$，所以 $|AB|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{17}$（相应的 Γ 的方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$）．

……………………12 分

综上可知，$|AB|$ 的所有可能值为 $5, \sqrt{7}, \sqrt{17}$． ……………………16 分

10. （本题满分 20 分） 设 a, b, c 均大于 1，满足

$$\begin{cases}\lg a+\log_b c=3,\\ \lg b+\log_a c=4.\end{cases}$$

求 $\lg a\cdot\lg c$ 的最大值．

解： 设 $\lg a=x, \lg b=y, \lg c=z$，由 $a, b, c>1$ 可知 $x, y, z>0$．

由条件及换底公式知 $x+\frac{z}{y}=3, y+\frac{z}{x}=4$，即 $xy+z=3y=4x$．

……………………5 分

由此，令 $x=3t, y=4t(t>0)$，则 $z=4x-xy=12t-12t^2$．其中由 $z>0$ 可知 $t\in(0,1)$． ……………………10 分

因此，结合三元平均值不等式得

$$\lg a\lg c=xz=3t\cdot 12t(1-t)=18\cdot t^2(2-2t)$$
$$\le 18\cdot\left(\frac{t+t+(2-2t)}{3}\right)^3=18\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{16}{3}.$$

当 $t=2-2t$，即 $t=\frac{2}{3}$（相应的 a,b,c 分别为 $100, 10^{\frac{8}{3}}, 10^{\frac{8}{3}}$）时，$\lg a\lg c$ 取到最大值 $\frac{16}{3}$． ……………………20 分

11．（本题满分 20 分）设复数数列 $\{z_n\}$ 满足：$|z_1|=1$，且对任意正整数 n，均有 $4z_{n+1}^2+2z_nz_{n+1}+z_n^2=0$．证明：对任意正整数 m，均有

$$|z_1+z_2+\cdots+z_m|<\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

证明：归纳地可知 $z_n\ne 0\,(n\in\mathbf{N}^*)$．由条件得

$$4\left(\frac{z_{n+1}}{z_n}\right)^2+2\left(\frac{z_{n+1}}{z_n}\right)+1=0\,(n\in\mathbf{N}^*),$$

解得 $\frac{z_{n+1}}{z_n}=\frac{-1\pm\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{4}\,(n\in\mathbf{N}^*)$． ……………………5 分

因此 $\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|}=\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|=\left|\frac{-1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{4}\right|=\frac{1}{2}$，故

$$|z_n|=|z_1|\cdot\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1}{2^{n-1}}\,(n\in\mathbf{N}^*).\qquad ①$$

进而有

$$|z_n+z_{n+1}|=|z_n|\cdot\left|1+\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|=\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\left|\frac{3\pm\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{4}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2^n}\,(n\in\mathbf{N}^*).\qquad ②$$

……………………10 分

当 m 为偶数时，设 $m=2s\,(s\in\mathbf{N}^*)$．利用②可得

$$|z_1+z_2+\cdots+z_m|\le\sum_{k=1}^{s}|z_{2k-1}+z_{2k}|<\sum_{k=1}^{\infty}|z_{2k-1}+z_{2k}|=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{3}}{2^{2k-1}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

……………………15 分

当 m 为奇数时，设 $m=2s+1\,(s\in\mathbf{N})$．由①、②可知

$$|z_{2s+1}|=\frac{1}{2^{2s}}<\frac{\sqrt{3}}{3\cdot 2^{2s-1}}=\sum_{k=s+1}^{\infty}\frac{\sqrt{3}}{2^{2k-1}}=\sum_{k=s+1}^{\infty}|z_{2k-1}+z_{2k}|,$$

故

$$|z_1+z_2+\cdots+z_m|\le\left(\sum_{k=1}^{s}|z_{2k-1}+z_{2k}|\right)+|z_{2s+1}|<\sum_{k=1}^{\infty}|z_{2k-1}+z_{2k}|=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

综上，结论获证． ……………………20 分

2019年全国高中数学联合竞赛加试（B卷）
参考答案及评分标准

说明：

1. 评阅试卷时，请严格按照本评分标准的评分档次给分.

2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，10分为一个档次，不得增加其他中间档次.

一、（本题满分40分） 设正实数 $a_1, a_2, \cdots, a_{100}$ 满足 $a_i \geq a_{101-i}\ (i=1,2,\cdots,50)$. 记 $x_k = \dfrac{k a_{k+1}}{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}\ (k=1,2,\cdots,99)$. 证明：$x_1 x_2^2 \cdots x_{99}^{99} \leq 1$.

证明： 注意到 $a_1, a_2, \cdots, a_{100} > 0$. 对 $k = 1,2,\cdots,99$，由平均值不等式知

$$0 < \left(\frac{k}{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}\right)^k \leq \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_k},$$ ……………10分

从而有

$$x_1 x_2^2 \cdots x_{99}^{99} = \prod_{k=1}^{99} a_{k+1}^k \left(\frac{k}{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}\right)^k \leq \prod_{k=1}^{99} \frac{a_{k+1}^k}{a_1 a_2 \cdots a_k}. \quad ①$$

………………20分

记①的右端为 T，则对任意 $i = 1,2,\cdots,100$，a_i 在 T 的分子中的次数为 $i-1$，在 T 的分母中的次数为 $100-i$. 从而

$$T = \prod_{i=1}^{100} a_i^{2i-101} = \prod_{i=1}^{50} a_i^{2i-101} a_{101-i}^{2(101-i)-101} = \prod_{i=1}^{50} \left(\frac{a_{101-i}}{a_i}\right)^{101-2i}.$$

………………30分

又 $0 < a_{101-i} \leq a_i\ (i=1,2,\cdots,50)$，故 $T \leq 1$，结合①得

$$x_1 x_2^2 \cdots x_{99}^{99} \leq T \leq 1.$$ ………………40分

二、（本题满分40分） 求满足以下条件的所有正整数 n：

(1) n 至少有4个正约数；

(2) 若 $d_1 < d_2 < \cdots < d_k$ 是 n 的所有正约数，则 $d_2 - d_1, d_3 - d_2, \cdots, d_k - d_{k-1}$ 构成等比数列.

解： 由条件可知 $k \geq 4$，且 $\dfrac{d_3 - d_2}{d_2 - d_1} = \dfrac{d_k - d_{k-1}}{d_{k-1} - d_{k-2}}$. ………………10分

易知 $d_1 = 1, d_k = n, d_{k-1} = \dfrac{n}{d_2}, d_{k-2} = \dfrac{n}{d_3}$，代入上式得

$$\frac{d_3 - d_2}{d_2 - 1} = \frac{n - \dfrac{n}{d_2}}{\dfrac{n}{d_2} - \dfrac{n}{d_3}},$$

化简得

$$(d_3 - d_2)^2 = (d_2 - 1)^2 d_3.$$ ………………20分

由此可知d_3是完全平方数．由于$d_2=p$是n的最小素因子，d_3是平方数，故只能$d_3=p^2$．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　…………………30 分

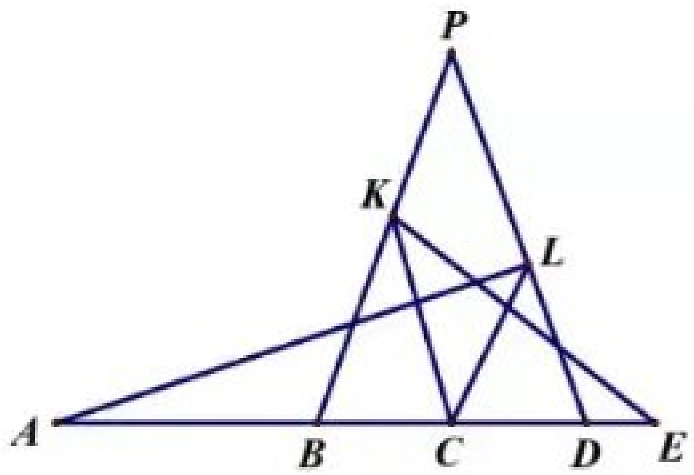
从而序列$d_2-d_1,d_3-d_2,\cdots,d_k-d_{k-1}$为$p-1,p^2-p,p^3-p^2,\cdots,p^{k-1}-p^{k-2}$，即$d_1,d_2,d_3,\cdots,d_k$为$1,p,p^2,\cdots,p^{k-1}$，而此时相应的$n$为$p^{k-1}$．

综上可知，满足条件的n为所有形如p^a的数，其中p是素数，整数$a\geq 3$．

…………………40 分

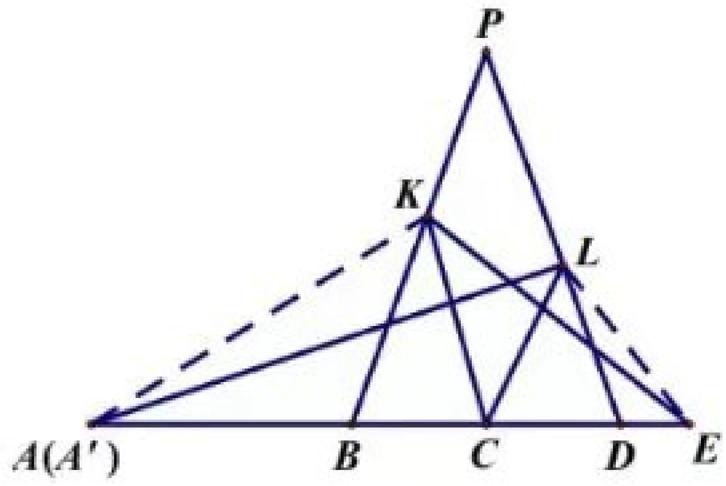
三、（本题满分 50 分）如图，点A,B,C,D,E在一条直线上顺次排列，满足$BC=CD=\sqrt{AB\cdot DE}$，点P在该直线外，满足$PB=PD$．点K,L分别在线段PB,PD上，满足KC平分$\angle BKE$，LC平分$\angle ALD$．

证明：A,K,L,E四点共圆．**（答题时请将图画在答卷纸上）**



证明：令$AB=1,BC=CD=t(>0)$，由条件知$DE=t^2$．

注意到$\angle BKE<\angle ABK=\angle PDE<180^\circ-\angle DEK$，可在$CB$延长线上取一点$A'$，使得$\angle A'KE=\angle ABK=\angle A'BK$．　　　　　　　　　　　…………………10 分



此时有$\Delta A'BK\backsim\Delta A'KE$，故$\dfrac{A'B}{A'K}=\dfrac{A'K}{A'E}=\dfrac{BK}{KE}$．　　　　　…………………20 分

又KC平分$\angle BKE$，故$\dfrac{BK}{KE}=\dfrac{BC}{CE}=\dfrac{t}{t+t^2}=\dfrac{1}{1+t}$．于是有

$$\frac{A'B}{A'E}=\frac{A'B}{A'K}\cdot\frac{A'K}{A'E}=\left(\frac{BK}{KE}\right)^2=\frac{1}{1+2t+t^2}=\frac{AB}{AE}.$$　　　…………30 分

由上式两端减 1，得$\dfrac{BE}{A'E}=\dfrac{BE}{AE}$，从而$A'=A$．因此$\angle AKE=\angle A'KE=\angle ABK$．

同理可得$\angle ALE=\angle EDL$．

而$\angle ABK=\angle EDL$，所以$\angle AKE=\angle ALE$．因此A,K,L,E四点共圆．

…………………50 分

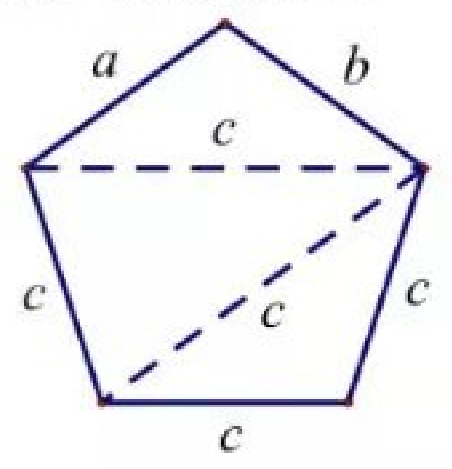
四、（本题满分 50 分）将一个凸 2019 边形的每条边任意染为红、黄、蓝三种颜色之一，每种颜色的边各 673 条．证明：可作这个凸 2019 边形的 2016 条在内部互不相交的对角线将其剖分成 2017 个三角形，并将所作的每条对角线也染

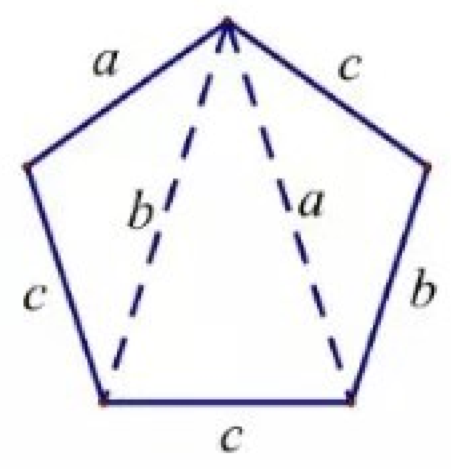
为红、黄、蓝三种颜色之一，使得每个三角形的三条边或者颜色全部相同，或者颜色互不相同．

证明：我们对$n\geq 5$归纳证明加强的命题：如果将凸n边形的边染为三种颜色a,b,c，并且三种颜色的边均至少有一条，那么可作满足要求的三角形剖分．

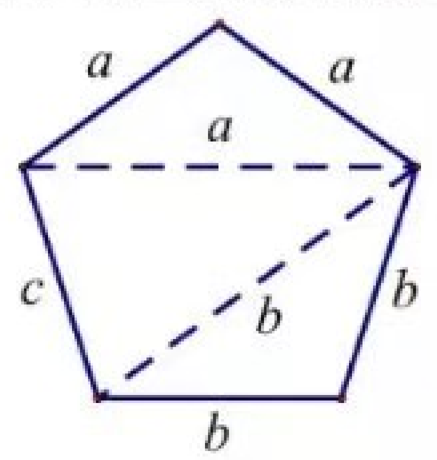
…………………10 分

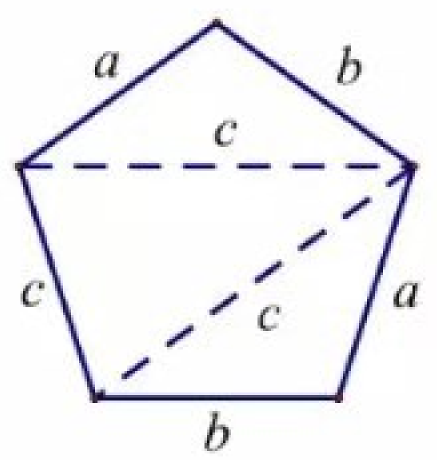
当$n=5$时，若三种颜色的边数为 1，1，3，由对称性，只需考虑如下两种情形，分别可作图中所示的三角形剖分．

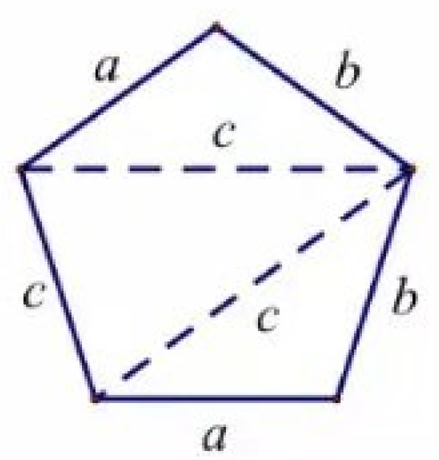




若三种颜色的边数为 1，2，2，由对称性，只需考虑如下三种情形，分别可作图中所示的三角形剖分．







…………………20 分

假设结论对$n(n\geq 5)$成立，考虑$n+1$的情形，将凸$n+1$边形记为$A_1A_2\cdots A_{n+1}$．

情形 1：有两种颜色的边各只有一条．不妨设a,b色边各只有一条．由于$n+1\geq 6$，故存在连续两条边均为c色，不妨设是$A_nA_{n+1},A_{n+1}A_1$．作对角线A_1A_n，并将A_1A_n染为c色，则三角形$A_nA_{n+1}A_1$的三边全部同色．此时凸n边形$A_1A_2\cdots A_n$的三种颜色的边均至少有一条，由归纳假设，可对其作符合要求的三角形剖分．

…………………30 分

情形 2：某种颜色的边只有一条，其余颜色的边均至少两条．不妨设a色边只有一条，于是可以选择两条相邻边均不是a色，不妨设$A_nA_{n+1},A_{n+1}A_1$均不是a色，作对角线A_1A_n，则A_1A_n有唯一的染色方式，使得三角形$A_nA_{n+1}A_1$的三边全部同色或互不同色．此时凸n边形$A_1A_2\cdots A_n$的三种颜色的边均至少有一条，由归纳假设，可对其作符合要求的三角形剖分．　　　　…………………40 分

情形 3：每种颜色的边均至少两条．作对角线A_1A_n，则A_1A_n有唯一的染色方式，使得三角形$A_nA_{n+1}A_1$的三边全部同色或互不同色．此时凸n边形$A_1A_2\cdots A_n$的三种颜色的边均至少有一条，由归纳假设，可对其作符合要求的三角形剖分．

综合以上 3 种情形，可知$n+1$的情形下结论也成立．

由数学归纳法，结论获证．　　　　…………………50 分