

江苏省仪征中学 2021-2022 学年度第一学期高三数学学科导学案

§ 9.1 三角恒等变换

研制人：刘威 审核人：陈宏强

班级：_____ 姓名：_____ 学号：_____ 授课日期：2021.10.25

- ①经历推导两角差余弦公式的过程，知道两角差余弦公式的意义。
- ②能利用两角差的余弦公式导出两角和的正弦、余弦、正切公式，导出二倍角的正弦、余弦、正切公式，了解它们的内在联系。
- ③能利用辅助角公式化简。

课前热身

- $\cos 24^\circ \cos 36^\circ - \cos 66^\circ \cos 54^\circ$ 的值等于()
A. 0 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$
- 已知函数 $f(x) = \sin^2 x + \sin^2(x + \frac{\pi}{3})$ ，则 $f(x)$ 的最小值为()
A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- 已知 $\sin \alpha + \sin \beta = \frac{4}{5}$ ， $\cos \alpha + \cos \beta = \frac{3}{5}$ ，则 $\cos(\alpha - \beta)$ 的值为()
A. $\frac{9}{25}$ B. $\frac{16}{25}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$
- 已知 $\sin(x + \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{3}$ ，则 $\sin(2x - \frac{\pi}{6}) =$ ()
A. $-\frac{7}{9}$ B. $\frac{7}{9}$ C. $-\frac{4\sqrt{2}}{9}$ D. $\frac{4\sqrt{2}}{9}$
- (多)下列选项中，值为 $\frac{1}{4}$ 的是()
A. $\cos 72^\circ \cos 36^\circ$ B. $\frac{1}{\sin 50^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{\cos 50^\circ}$
C. $\sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12}$ D. $\cos^2 \frac{\pi}{12} - \sin^2 \frac{\pi}{12}$
- 已知 $\tan(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}$ ， $\tan \beta = -\frac{1}{7}$ ，且 $\alpha, \beta \in (0, \pi)$ ，则 $2\alpha - \beta =$ _____.

知识梳理

- 两角和与差的正弦、余弦、正切公式
- 二倍角公式
- 辅助角公式

典例研究

例 1 (1) $\frac{\sin 47^\circ - \sin 17^\circ \cos 30^\circ}{\sin 17^\circ}$

(2) $\tan 25^\circ + \tan 35^\circ + \sqrt{3} \tan 25^\circ \tan 35^\circ$.

(3) $\sin(x + \frac{\pi}{3}) + 2 \sin(x - \frac{\pi}{3}) - \sqrt{3} \cos(\frac{2\pi}{3} - x)$

例 2. (1) 设 $0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 且 $\cos \alpha = \frac{1}{7}$, $\cos(\alpha - \beta) = \frac{13}{14}$, 求角 β 的值;

(2) 已知 $\tan \alpha = \frac{2}{3}$, 且 $\sin(2\alpha + \beta) = \frac{3}{2} \sin \beta$, 求 $\tan(\alpha + \beta)$ 的值.

例 3. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{6}) + \sin(\omega x - \frac{\pi}{6}) + 2 \cos^2 \frac{\omega x}{2}$, $x \in \mathbb{R}, \omega > 0$, $f(x)$ 在 (a, b) 上单调递增,

且 $b - a$ 的最大值为 $\frac{\pi}{2}$.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 若 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 求 $f(x)$ 的单调递增区间和最值;

(3) 在(2)的条件下, 若函数 $g(x) = f(x) - k$ 有且仅有一个零点, 求实数 k 的取值范围.

课堂小结

跟踪反馈

1. $4\cos 50^\circ - \tan 40^\circ = (\quad)$

- A. $\sqrt{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{2}-1$

2. 已知 $\tan \alpha = 3$, $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, 则 $\sin 2\alpha + \cos(\pi - \alpha)$ 的值为()

- A. $\frac{6-\sqrt{10}}{10}$ B. $\frac{6+\sqrt{10}}{10}$ C. $\frac{5-\sqrt{10}}{10}$ D. $\frac{5+\sqrt{10}}{10}$

3. 已知 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, $2\sin 2\alpha = \cos 2\alpha + 1$, 则 $\sin \alpha = (\quad)$

- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

4. 已知 $0 < \beta < \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, 且 $\cos(\alpha - \frac{\beta}{2}) = -\frac{1}{9}$, $\sin(\frac{\alpha}{2} - \beta) = \frac{2}{3}$, 则 $\cos(\alpha + \beta)$ 的值为()

- A. $-\frac{239}{729}$ B. $\frac{239}{729}$ C. -1 D. 1

5. 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 A, B 在单位圆上, 且点 A 在第一象限, 横坐标是 $\frac{3}{5}$, 将点 A 绕原点 O 顺时针旋转 $\frac{\pi}{3}$ 到 B 点, 则点 B 的横坐标为()

- A. $\frac{4-3\sqrt{3}}{10}$ B. $\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$ C. $\frac{3\sqrt{3}-4}{10}$ D. $\frac{3\sqrt{3}+4}{10}$

6. (多) 若 $\tan x_1, \tan x_2$ 是方程 $x^2 - kx + 2 = 0$ 的两个不相等的正根, 则下列结论正确的是()

- A. $\tan x_1 + \tan x_2 = -k$ B. $\tan(x_1 + x_2) = -k$
C. $k > 2\sqrt{2}$ D. $k > 2\sqrt{2}$ 或 $k < -2\sqrt{2}$

7. (多) 已知函数 $f(x) = \sin \omega x + \sqrt{3} \cos \omega x (\omega > 0)$, 若有且仅有两个不同的实数 $x_1, x_2 \in [0, 1]$, 使得 $f(x_1) = f(x_2) = 2$. 则实数 ω 的值可能为()

- A. $\frac{13}{6}\pi$ B. 3π C. $\frac{19}{6}\pi$ D. $\frac{25}{6}\pi$

8. (多) 若 $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, 且 $3\cos 2\alpha = \cos(\frac{\pi}{4} + \alpha)$, 则 $\sin 2\alpha$ 可能是()

- A. $-\frac{\sqrt{35}}{6}$ B. 1 C. $-\frac{\sqrt{35}}{18}$ D. $-\frac{17}{18}$

三、填空题

9. 已知 $\cos(\alpha - \frac{\pi}{4}) = \frac{3}{5}$, 且 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{4})$, 则 $\sin \alpha = \underline{\hspace{2cm}}$.

10. $\tan 70^\circ + \tan 50^\circ - \sqrt{3} \tan 50^\circ \tan 70^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$.

11. 已知 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$, 且 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\sin \beta = \frac{\sqrt{10}}{10}$, 则 $\alpha + \beta = \underline{\hspace{2cm}}$.

四、解答题

12. 已知 $\sin(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{7\sqrt{2}}{10}$, $x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$.

(1)求 $\sin x$ 的值; (2)求 $\cos(2x + \frac{\pi}{6})$ 的值.

13. 已知函数 $f(x) = 2\cos x(\sqrt{3}\sin x + \cos x) - 1$.

(1)求 $f(x)$ 在区间 $[0, \pi/2]$ 上的单调递增区间及最值; (2)若 $\alpha \in (0, \pi)$, $f(\frac{\alpha}{2}) = \frac{2}{3}$, 求 $\sin(\alpha + \frac{\pi}{3})$ 的值.

(3) 若函数 $y = f(\frac{\omega x}{2})$ 在区间 $(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ 上是单调增函数, 求正数 ω 的取值范围。