

高三数学基础强化滚动训练(三)

(满分 100 分 时间 80 分钟)

一、单项选择题(每小题 5 分, 共 35 分)

1. 设集合 $A = \{x | -2 < x < 2\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$. 则 $B \cap \complement_{\mathbb{R}} A =$ ()
 A. $\{1\}$ B. $\{1, 2\}$ C. $\{2, 3, 4\}$ D. $\{3, 4\}$

2. 下列区间中, 函数 $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{4}) - \cos(x - \frac{\pi}{4})$ 存在极大值的区间是 ()

A. $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ B. $(0, \pi)$ C. $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ D. $(\pi, 2\pi)$

3. 在 $\triangle ABC$ 中, D 为 BC 边的中点, 且满足 $AB = AD = 2$, $AC = 4$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 ()

A. $\sqrt{15}$ B. $2\sqrt{15}$ C. $\frac{\sqrt{15}}{4}$ D. 1

4. 已知 $x > 0$, $y > 0$, 且 $x + 3y = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}$, 则 y 的最大值为 ()

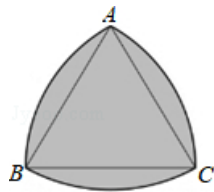
A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. 2 D. $\frac{1}{3}$

5. 设 a, b 是正实数, 以下不等式恒成立的为 ()

A. $\sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$ B. $ab + \frac{2}{ab} > 9$
 C. $a^2 + b^2 > 4ab - 3b^2$ D. $a > |a - b| - b$

6. 如图, 分别以等边三角形 ABC 的三个顶点为圆心, 以边长为半径画弧, 得到的封闭图形是莱洛三角形, 若 $AB = 2$, 则莱洛三角形的面积(即阴影部分面积)为 ()

A. $\pi + \sqrt{3}$ B. $\pi\sqrt{3}$ C. $2\pi - 2\sqrt{3}$ D. $2\pi\sqrt{3}$



7. 函数 $f(x) = x^2 + a^2 + b \ln x$ ($a, b \in \mathbb{R}$) 有极小值, 且极小值为 0, 则 $a^2 - b$ 的最小值为

A. e B. 2e C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

二、多项选择题(每小题 5 分, 共 15 分)

8. 若函数 $f(x) = \sin |x| - \cos 2x$, 则 ()

A. $f(x)$ 是周期函数 B. $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上有 4 个零点
 C. $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上是增函数 D. $f(x)$ 的最小值为 -1

9. 下列命题中为真命题的是 ()

A. “ $a - b = 0$ ” 的充要条件是 “ $\frac{a}{b} = 1$ ”
 B. “ $a > b$ ” 是 “ $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ ” 的既不充分也不必要条件
 C. 命题 “ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 2^x < 0$ ” 的否定是 “ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 2^x \geq 0$ ”
 D. “ $a > 2, b > 2$ ” 是 “ $ab > 4$ ” 的必要条件

10. 关于函数 $f(x) = \frac{|x \log_2(1-x^2)|}{|x-1|-1}$ 的性质的描述, 正确的是

- A. $f(x)$ 的定义域为 $(-1, 0) \cup (0, 1)$ B. $f(x)$ 有一个零点
C. $f(x)$ 的图象关于原点对称 D. $f(x)$ 的值域为 $(-\infty, 0)$

三、 填空题(每小题 5 分, 共 15 分)

11. 已知 $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 则 $\sin 2\alpha =$ _____.

12. 设 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数, 对任意的 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, $x_1 \neq x_2$, 满足:

$\frac{x_1 f(x_1) - x_2 f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$, 若 $f(2) = 4$, 则不等式 $f(x) - \frac{8}{x} > 0$ 的解集为 _____.

13. 已知函数 $f(x) = x^3 + mx + n$, 对任意的 $x \in [-2, 2]$, 使得 $|f(x)| \leq 2$, 则 $m + n =$ _____.

四、 解答题(每小题 12 分, 共 35 分)

14. (本题满分 12 分)

现有下列三个条件:

- ① 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π ;
② 函数 $f(x)$ 的图象可以由 $y = \sin x - \cos x$ 的图象平移得到;
③ 函数 $f(x)$ 的图象相邻两条对称轴之间的距离 $\frac{\pi}{2}$.

从中任选一个条件补充在下面的问题中, 并作出正确解答.

已知向量 $\mathbf{m} = (\sqrt{3} \sin \omega x, \cos 2\omega x)$, $\mathbf{n} = (2 \cos \omega x, 1)$, $\omega > 0$, 函数 $f(x) = \mathbf{m} \cdot \mathbf{n}$.
且满足 _____.

(1) 求 $f(x)$ 的表达式, 并求方程 $f(x) = 1$ 在闭区间 $[0, \pi]$ 上的解;

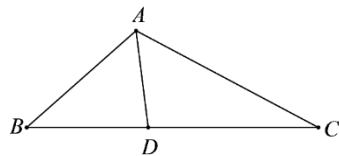
(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $(3a - c) \cos B = b \cos C$, $f(\frac{C}{2}) = 2$,
求 $\cos A$ 的值.

注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分.

15. (本题满分 11 分)

如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 6$, $\cos B = \frac{3}{4}$, 点 D 在 BC 边上, $AD = 4$, $\angle ADB$ 为锐角.

- (1) 若 $AC = 6\sqrt{2}$, 求线段 DC 的长度;
- (2) 若 $\angle BAD = 2\angle DAC$, 求 $\sin C$ 的值.



16. (本题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \ln x + \frac{a}{x} (a \in \mathbf{R})$ 有两个零点.

(1) 证明: $0 < a < \frac{1}{e}$.

(2) 若 $f(x)$ 的两个零点为 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 证明: $2a < x_1 + x_2 < 1$.