

2019-2020 学年江苏省仪征中学 10 月月考数学试卷

考试范围：集合、函数；考试时间：120 分钟

注意：第一题为选择题，所有答案必须用 2B 铅笔涂在答题卡中相应的位置。

第二、三卷为非选择题，所有答案必须填在答题卷的相应位置。答案写在试卷上均无效，不予记分。

一、选择题（本大题共 12 小题，共 60 分）

1. 函数 $f(x)=\sqrt{x+1}-\frac{1}{2-x}$ 的定义域为 ()

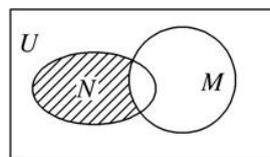
- A. $[-1,2) \cup (2,+\infty)$ B. $(-1,+\infty)$ C. $[-1,2)$ D. $[-1,+\infty)$

2. 设集合 $A=\{x|x^2-4x+3<0\}$, $B=\{x|2x-3>0\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $(-3, -\frac{3}{2})$ B. $(-3, \frac{3}{2})$ C. $(1, \frac{3}{2})$ D. $(\frac{3}{2}, 3)$

3. 设全集 U 是实数集 R , $M = \{x|x^2 > 4\}$, $N = \{x|x \geq 3 \text{ 或 } x < 1\}$ 都是 U 的子集, 则图中阴影部分所表示的集合是 ()

- A. $\{x|-2 \leq x < 1\}$ B. $\{x|-2 \leq x \leq 2\}$ C. $\{x|1 < x \leq 2\}$ D. $\{x|x < 2\}$



4. 函数 $y=x^2-2x+3$ ($x \in (0, 3]$) 的值域为 ()

- A. $[2, +\infty)$ B. $[2, 6]$ C. $[3, 6]$ D. $(3, 6]$

5. 下列各组函数中, 是相等函数的是 ()

- A. $y = \sqrt[5]{x^5}$ 与 $y = \sqrt{x^2}$ B. $f(x) = x^2 - 2x - 1$ 与 $g(t) = t^2 - 2t - 1$ ($t \in z$)
 C. $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ 与 $g(x) = x + 2$ D. $y = x^0$ 与 $g(x) = \frac{1}{x^0}$

6. 设集合 $A=\{1, 2, 4\}$, $B=\{x|x^2-4x+m=0\}$. 若 $A \cap B = \{1\}$, 则 $B =$ ()

- A. $\{1, -3\}$ B. $\{1, 0\}$ C. $\{1, 3\}$ D. $\{1, 5\}$

7. 已知偶函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 单调递增,

则满足 $f(2x-1) < f(\frac{1}{3})$ 的 x 取值范围是 ()

- A. $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ B. $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ C. $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$ D. $[\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$

8. 已知函数 $y=f(x)$ 定义域是 $[-2, 3]$, 则 $y=f(2x-1)$ 的定义域是 ()

- A. $[0, \frac{5}{2}]$ B. $[-1, 4]$ C. $[-\frac{1}{2}, 2]$ D. $[-5, 5]$

9. 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减, 且为奇函数. 若 $f(1) = -1$, 则满足 $-1 \leq f(x-2) \leq 1$ 的 x 的取值范围是 ()

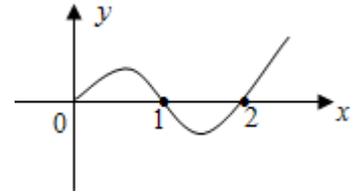
- A. $[-2, 2]$ B. $[-1, 1]$ C. $[0, 4]$ D. $[1, 3]$

10. 当 $x \in R$ 时, 不等式 $kx^2 - kx + 1 > 0$ 恒成立, 则 k 的取值范围是 ()

- A. $(0, +\infty)$ B. $[0, +\infty)$ C. $[0, 4)$ D. $(0, 4)$

11. 已知奇函数 $f(x)$ 在 $x \geq 0$ 时的图象如图所示, 则不等式 $x f(x) < 0$ 的解集为 ()

- A. $(1, 2)$ B. $(-2, -1)$ C. $(-2, -1) \cup (1, 2)$ D. $(-1, 1)$



12. 已知函数 $f(x) = x|x - a| - a, a \in R$, 若对任意的 $x \in [3, 5], f(x) \geq 0$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, \frac{9}{4}] \cup [3, +\infty)$ B. $[3, 5]$
 C. $[\frac{9}{4}, \frac{25}{4}]$ D. $(-\infty, \frac{9}{4}] \cup [\frac{25}{4}, +\infty)$

二、填空题 (本大题共 4 小题, 共 20 分)

13. 设集合 $A = \{x \in Q | x > -1\}$, 则 $\sqrt{2}$ _____ A. (用适当的符号填空)

14. 已知函数 $f(x) = ax^3 + bx + 1$, 若 $f(a) = 8$, 则 $f(-a) =$ _____ .

15. 函数 $f(x) = \begin{cases} ax^2 + x - 1, & (x > 2) \\ -x + 1, & (x \leq 2) \end{cases}$ 是 R 上的单调递减函数, 则实数 a 的取值范围是 _____ .

16. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 当 $x > 1$ 时 $f(x) > 0$,

任意的实数 x, y 满足 $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$, 不等式 $f(x+1) > f(8x-8)$ 的解集为 _____ .

三、解答题 (本大题共 6 小题, 共 70 分)

17. (本小题满分 10 分)

已知集合 $A = \{x | 3 \leq x \leq 7\}$, $B = \{x | x^2 - 12x + 20 < 0\}$, $C = \{x | x < a\}$.

- (1) 求 $A \cup B$, $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B$; (2) 若 $A \cap C = A$, 求 a 的取值范围.

18. (本小题满分 12 分)

已知集合 $B = \{x | x^2 - ax + 3a - 5 = 0\}$,

(1) 若 $A = \{x | x - 2 = 0\}$, $A \cap B = A$, 求实数 a 的值;

(2) 若 $A = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $A \cup B = A$, 求实数 a 的取值范围.

19. (本小题满分 12 分)

甲厂根据以往的生产销售经验得到下面有关生产销售的统计规律: 每生产产品 x (百台), 其总成本为 $G(x)$ (万元), 其中固定成本为 3 万元, 并且每生产 1 百台的生产成本为 1 万元 (总成本=固定成本+生产成本), 销售收入 $R(x) = \begin{cases} -0.4x^2 + 4.2x + 0.2 & (0 \leq x \leq 5) \\ 11.2 & (x > 5) \end{cases}$, 假定该产品产销平衡 (即生产的产品都能

卖掉), 根据上述统计规律, 请完成下列问题:

(1) 写出利润函数 $y=f(x)$ 的解析式 (利润=销售收入-总成本);

(2) 甲厂生产多少台新产品时, 可使盈利最多?

20. (本小题满分 12 分)

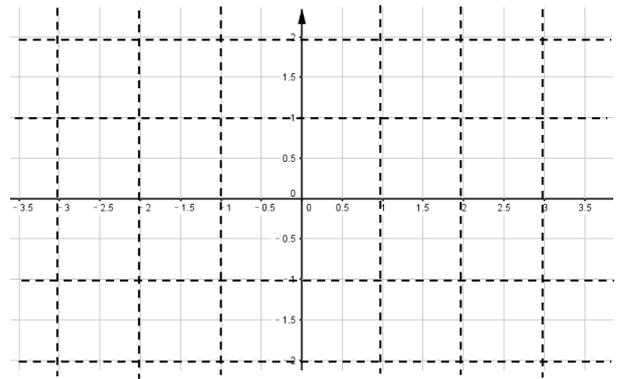
已知二次函数 $f(x)$ 的最小值为 1, 且 $f(0) = f(2) = 3$.

- (1) 求 $f(x)$ 的解析式;
- (2) 若 $f(x)$ 在区间 $[2a, a+1]$ 上不单调, 求实数 a 的取值范围;
- (3) 在区间 $[-1, 1]$ 上, $y = f(x) + mx$ 的最大值记为 $h(m)$, 求 $h(m)$ 的解析式.

21. (本小题满分 12 分)

已知定义在 R 上的奇函数 $g(x) = \frac{x+a}{x^2+bx+1} (a, b \in R)$.

- (1) 求 a, b 的值;
- (2) 用定义证明函数 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减;
- (3) 试画出 $g(x)$ 的草图, 并写出函数的值域.



22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = |2 - \frac{p}{x}|$ (p 为大于 0 的常数).

- (1) 求函数 $f(x)$ 在 $[1, 4]$ 上的最大值 (用常数 p 表示);
- (2) 若 $p = 1$, 是否存在实数 m 使得函数 $f(x)$ 的定义域为 $[a, b]$, 值域为 $[ma, mb]$, 如果存在求出实数 m 的取值范围, 如果不存在说明理由.

2019-2020 学年江苏省仪征中学 10 月月考数学试卷答案与解析

1. A 2. D 3. A 4. B 5. D 6. C 7. A 8. C 9. D 10. A 11. C 12. D

13. \emptyset 14. -6 15. $(-\infty, -\frac{1}{2}]$ 16. $(\frac{7}{9}, 1) \cup (1, \frac{9}{7})$

11. C

解: (1) $x > 0$ 时, $f(x) < 0$, $\therefore 1 < x < 2$,

(2) $x < 0$ 时, $f(x) > 0$, $\therefore -2 < x < -1$,

\therefore 不等式 $xf(x) < 0$ 的解集为 $(-2, -1) \cup (1, 2)$. 故选 C.

12. D

解: $f(x) = x|x - a| - a$;

\therefore ①若 $a < 3$, 则 $x = 3$ 时, $f(x)$ 在 $[3, 5]$ 上取得最小值 $f(3) = 3(3 - a) - a = 9 - 4a$;

$\therefore 9 - 4a \geq 0, a \leq \frac{9}{4}; \therefore a \leq \frac{9}{4}$;

②若 $3 \leq a \leq 5$, 则 $x = a$ 时, $f(x)$ 取得最小值 $f(a) = -a, -a < 0$, 不满足 $f(x) \geq 0$, 即这种情况不存在;

③若 $a > 5$, 则 $x = 5$ 时, $f(x)$ 取得最小值 $f(5) = 5(a - 5) - a = 4a - 25$,

$\therefore 4a - 25 \geq 0, a \geq \frac{25}{4}, \therefore a \geq \frac{25}{4}$;

综上, a 的取值范围为: $(-\infty, \frac{9}{4}] \cup [\frac{25}{4}, +\infty)$, 故选 D.

17. 解: (1) $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B = \{x | 2 < x < 3 \text{ 或 } 7 < x < 10\}$ (2) $a > 7$.

18. 解: (1) $a = 1$

(2) $A = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\} = \{1, 2\}$, 由 $x^2 - ax + 3a - 5 = 0$,

知 $\Delta = a^2 - 4(3a - 5) = a^2 - 12a + 20 = (a - 2)(a - 10)$.

(1) 当 $2 < a < 10$ 时, $\Delta < 0, B = \emptyset \subseteq A$;

(2) 当 $a \leq 2$ 或 $a \geq 10$ 时, $\Delta \geq 0$, 则 $B \neq \emptyset$.

若 $x = 1$, 则 $1 - a + 3a - 5 = 0$, 得 $a = 2$,

此时 $B = \{x | x^2 - 2x + 1 = 0\} = \{1\} \subseteq A$;

若 $x = 2$, 则 $4 - 2a + 3a - 5 = 0$, 得 $a = 1$,

此时 $B = \{2, -1\} \not\subseteq A$.

综上所述, 当 $2 \leq a < 10$ 时, 均有 $A \cap B = B$. (说明: 也可以分四种情况讨论求解.)

19. 解: (1) 由题意得 $G(x) = 3 + x$,

由 $R(x) = \begin{cases} -0.4x^2 + 4.2x + 0.2 & (0 \leq x \leq 5) \\ 11.2 & (x > 5) \end{cases}$,

$\therefore f(x) = R(x) - G(x) = \begin{cases} -0.4x^2 + 3.2x - 2.8, & 0 \leq x \leq 5 \\ 8.2 - x, & x > 5 \end{cases}$,

(2) 当 $x > 5$ 时, \therefore 函数 $y = f(x)$ 递减,

$\therefore f(x) < 8.2 - 5 = 3.2$ (万元),

当 $0 \leq x \leq 5$ 时, $f(x) = -0.4(x - 4)^2 + 3.6$,

当 $x = 4$ 时, $f(x)$ 有最大值为 3.6 (万元).

答: 当工厂生产 4 百台时, 可使赢利最大为 3.6 (万元).

20. 解析: (1) 设 $f(x) = a(x-1)^2 + 1$, 由 $f(0) = 3$, 得 $a = 2$, 故 $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$;

(2) 要使函数不单调, 则 $2a < 1 < a + 1$, 则 $0 < a < \frac{1}{2}$;

$$(3) f(x) = 2x^2 + (m-4)x + 3, h(m) = \begin{cases} m+1, m \geq 4 \\ 9-m, m < 4 \end{cases}, h(m)_{\min} = h(4) = 5$$

21. (1) 求 $a = 0, b = 0$ 的值; (2) 略 (3) $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

22. 【答案】解: (1) 函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{p}{x} - 2, x \leq \frac{p}{2} \\ 2 - \frac{p}{x}, x > \frac{p}{2} \end{cases}$

① 当 $\frac{p}{2} > 4$ 时, 即 $p > 8$, $f(x)$ 的最大值为: $f(1) = p - 2$;

② 当 $1 \leq \frac{p}{2} \leq 4$ 时, 即 $2 \leq p \leq 8$, $f(1) = p - 2, f(4) = 2 - \frac{p}{4}$,

(i) 若 $p \geq \frac{16}{5}, f(1) > f(4), f(x)$ 即的最大值为 $f(1) = p - 2$;

(ii) 若 $p < \frac{16}{5}, f(1) < f(4), f(x)$ 即的最大值为 $f(4) = 2 - \frac{p}{4}$;

③ 当 $\frac{p}{2} < 1$ 时, 即 $p < 2, f(x)$ 的最大值为 $f(4) = 2 - \frac{p}{4}$;

综上所述: 当 $p \geq \frac{16}{5}, f(x)$ 即的最大值为 $p - 2$, 当 $p < \frac{16}{5}, f(x)$ 即的最大值为 $2 - \frac{p}{4}$,

(2) 若 $p = 1$ 函数 $f(x) = |2 - \frac{1}{x}|$, 由 $a < b, ma < mb$ 知 $m(a - b) < 0, m > 0$ 又 $\because ma \geq 0, \therefore a > 0$

① 当 $0 < a < b \leq \frac{1}{2}$ 时,

由题意得 $\begin{cases} \frac{1}{a} - 2 = mb \\ \frac{1}{b} - 2 = ma \end{cases}$ 得 $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = m(b - a), \frac{1}{a} = mb, \therefore \frac{1}{a} - 2 = \frac{1}{a} a$ 无解.

② 当 $a \leq \frac{1}{2} \leq b$ 时, $ma = 0$ 与 $m > 0, a > 0$ 矛盾.

③ 当 $\frac{1}{2} \leq a < b$ 时, 由题意得 $\begin{cases} 2 - \frac{1}{a} = ma \\ 2 - \frac{1}{b} = mb \end{cases}$,

即 $2 - \frac{1}{x} = mx (x \geq \frac{1}{2})$ 有两个不同的实数解, 由 $2 - \frac{1}{x} = mx$ 得: $mx^2 - 2x + 1 = 0$.

要使得方程有两个不等的实根, 令 $g(x) = mx^2 - 2x + 1$,

\therefore 函数 $g(x)$ 应满足 $\begin{cases} \Delta > 0 \\ g(\frac{1}{2}) > 0 \\ \frac{1}{m} > \frac{1}{2} \end{cases}, \therefore m \in (0, 1)$.

【解析】本题(1)先对函数的解析式进行分类讨论, 去掉绝对值符号, 再分类讨论研究函数的最大值, 得到本题结论; (2) 通过分类研究, 由函数的定义域, 得到函数的值域, 结合已知条件, 求出实数 m 的取值范围, 得到本题结论. 本题考查了函数的定义域和值域, 还考查了分类讨论的数学思想.