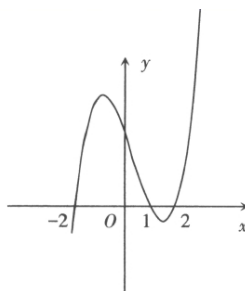
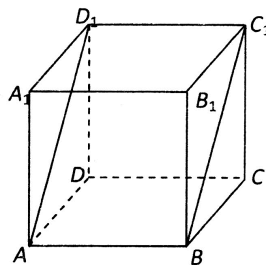


江苏省仪征中学 2020-2021 学年第二学期

高二数学周练 (2)

一、单项选择题 (本大题共 8 小题, 共 40.0 分)

1. 设复数 $z = 1 + bi (b \in R)$, 且 $z^2 = -3 + 4i$, 则 $\bar{z}$ 的虚部为 ()
A. $2i$ B. $-2i$ C. 2 D. -2
2. 设函数 $f(x) = 1 + \sin 2x$, 则 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x}$ 等于 ()
A. -2 B. 0 C. 3 D. 2
3. 下列四个选项中, 正确的是 ()
A. 复平面内实轴上的点都表示实数, 虚轴上的点都表示纯虚数
B. 若复数 z_1, z_2 满足 $z_1^2 + z_2^2 = 0$, 则 $z_1^2 = 0$ 且 $z_2^2 = 0$
C. 若复数 z_1, z_2 满足 $|z_1| = |z_2|$, 则 $z_1^2 = z_2^2$
D. 设 z 为复数, $a, b \in R$, 若 $z + a = 2\bar{z} = bi$, 则 $\bar{z} + a = 2z - bi$
4. 若直线 $y = 2x + b$ 是曲线 $y = 2a \ln x$ 的切线, 且 $a > 0$, 则实数 b 的最小值是 ()
A. 1 B. -1 C. 2 D. -2
5. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - a \ln x + x$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 则实数 a 的取值范围是 ()
A. $a \leq 0$ B. $0 \leq a \leq 1$ C. $a \leq 2$ D. $a < 2$
6. 设直线 $x = t$ 与函数 $f(x) = x^2, g(x) = \ln x$ 的图像分别交于点 M, N , 则当 $|MN|$ 达到最小时 t 的值为 ()
A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
7. 如图, 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, 则下列四个命题错误的是 ()
A. 直线 BC 与平面 ABC_1D_1 所成的角等于 $\frac{\pi}{4}$
B. 点 C 到面 ABC_1D_1 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$
C. 两条异面直线 D_1C 和 BC_1 所成的角为 $\frac{\pi}{4}$
D. 三棱柱 $AA_1D_1 - BB_1C_1$ 外接球半径为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$
8. 已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 函数 $g(x) = (x-1)f'(x)$ 的图象如图所示, 则下列结论正确的是 ()
A. $f(x)$ 在 $(-\infty, -2), (1, 2)$ 上为减函数
B. $f(x)$ 在 $(-2, 1), (2, +\infty)$ 上为增函数
C. $f(x)$ 的极小值为 $f(-2)$, 极大值为 $f(2)$
D. $f(x)$ 的极大值为 $f(-2)$, 极小值为 $f(2)$

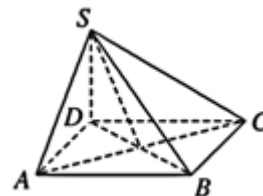


二、多项选择题（本大题共 4 小题，共 20.0 分）

9. 下列说法错误的有()

- A. $f'(x_0)$ 是函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 附近的平均变化率.
- B. 函数 $f(x) = \sin(-x)$ 的导数 $f'(x) = \cos x$.
- C. 求 $f'(x_0)$ 时, 可先求 $f(x_0)$, 再求 $f'(x_0)$.
- D. 曲线的切线与曲线不一定只有一个公共点.

10. 如图, 四棱锥 $S-ABCD$ 的底面为正方形, $SD \perp$ 底面 $ABCD$, 则下列结论正确结论的序号是()



- A. $AC \perp SB$
- B. SA 与平面 ABD 所成的角等于 SC 与平面 ABD 所成的角
- C. AB 与 SC 所成的角等于 DC 与 SA 所成的角.
- D. 二面角 $B-SD-C$ 的大小为 45°

11. 下列关于函数 $f(x) = (2x - x^2)e^x$ 的判断正确的是()

- A. $f(x)$ 的单减区间是 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$;
- B. $f(-\sqrt{2})$ 是极小值, $f(\sqrt{2})$ 是极大值;
- C. $f(x)$ 没有最小值, 也没有最大值;
- D. $f(x)$ 有最大值, 没有最小值.

12. i 是虚数单位, 下列说法中正确的有()

- A. 若复数 z 满足 $z \cdot \bar{z} = 0$, 则 $z = 0$
- B. 若复数 z_1, z_2 满足 $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$, 则 $z_1 z_2 = 0$
- C. 若复数 $z = a + ai (a \in R)$, 则 z 可能是纯虚数
- D. 若复数 z 满足 $z^2 = 3 + 4i$, 则 z 对应的点在第一象限或第三象限

三、填空题（本大题共 3 小题，共 15.0 分）

13. 已知复数 z 满足 $z + \frac{3}{z} = 0$, 则 $|z| =$ _____.

14. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - ax + 1$ 在 $(-1, 2)$ 上存在极值点, 则实数 a 的取值范围是_____.

15. 将正方形 $ABCD$ 沿对角线 BD 折成直二面角, 给出下列四个结论: ① $AC \perp BD$; ② AB, CD 所成角为 60° ; ③ $\triangle ADC$ 为等边三角形; ④ AB 与平面 BCD 所成角为 60° . 其中真命题是_____. (请将你认为是真命题的序号都填上)

16. 德国数学家莱布尼茨是微积分的创立者之一, 他从几何问题出发, 引进微积分概念. 在研究切线时, 他将切线问题理解为“求一条切线意味着画一条直线连接曲线

上距离无穷小的两个点”，这也正是导数定义的内涵之一．现已知直线 $y = x + b$ 是函数 $f(x) = \ln x$ 的切线，也是函数 $g(x) = e^{x+k}$ 的切线，则实 $b = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $k = \underline{\hspace{2cm}}$ ．

五、解答题（本大题共 6 小题，共 72.0 分）

17. 已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{x}$ ．

(1)求函数 $f(x)$ 单调区间并画出函数简图；

(2)若曲线 $f(x)$ 在某处切线平行于 x 轴，求切线方程．

18. 已知关于 x 的方程 $x^2 - (6 + i)x + 9 + ai = 0(a \in R)$ 有实数根 b ．

(1)求实数 a, b 的值．

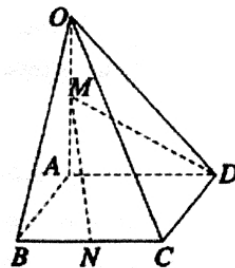
(2)若复数 z 满足 $|z - a + bi| - 2|z| = 0$ ，求 z 为何值时， $|z|$ 有最小值，并求出 $|z|$ 的最小值．

19. 已知函数 $f(x) = (\frac{1}{2}x^2 - ax)\ln x - \frac{1}{4}x^2 + ax(a$ 为常数).

(1)当 $a = 0$ 时，求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(e, f(e))$ 处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积；

(2)若存在 $x_0 \geq 1$ 使得 $f(x_0) < 0$ ，求 a 的取值范围．

20. 如图, 在四棱锥 $O-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 1 的菱形, $\angle ABC = \frac{\pi}{4}$, $OA \perp$ 底面 $ABCD$, $OA = 2$, M 为 OA 的中点, N 为 BC 的中点.
- (1) 证明: 直线 $MN \parallel$ 平面 OCD ;



- (2) 求异面直线 AB 与 MD 的夹角的大小;
- (3) 求点 B 到平面 OCD 的距离.

21. 已知函数 $f(x) = \ln x - 2x$, $g(x) = -ax^2 + ax - 2$.

- (1) 若曲线 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 在点 $(1, -2)$ 处有相同的切线, 求函数 $f(x) - g(x)$ 的极值;
- (2) 若 $h(x) = f(x) - g(x)$, 讨论函数 $h(x)$ 的单调性.

22. 已知函数 $f(x) = x(1 + \ln x)$.

- (1) 求函数 $f(x)$ 的极值;
- (2) 若 $k \in \mathbb{Z}$, 且 $k(x-1) < f(x)$ 对任意 $x > 1$ 恒成立, 求 k 的最大值.

答案和解析

1. 【答案】D

【解析】

【分析】

本题考查了复数的运算法则、复数相等、虚部的定义，共轭复数，考查了推理能力与计算能力，属于基础题.

利用复数的运算法则、复数相等、共轭复数，虚部的定义即可得出.

【解答】

解：∵ $z^2 = -3 + 4i$, $z = 1 + bi (b \in R)$,

$$\therefore (1 + bi)^2 = -3 + 4i, \quad 1 - b^2 + 2bi = -3 + 4i,$$

$$\therefore 1 - b^2 = -3, \quad 2b = 4,$$

解得 $b = 2$.

$$\text{即 } \bar{z} = 1 - 2i,$$

则 $\bar{z}$ 的虚部为 -2 .

故选 D.

2. 【答案】D

【解析】

【分析】

本题考查导数的定义，考查学生的计算能力，属于基础题.

利用导数的定义，即可得出结论.

【解答】

解：∵ $f(x) = 1 + \sin 2x$,

$$\therefore \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = f'(0),$$

$$\text{而 } f'(x) = 2\cos 2x,$$

$$\text{所以 } f'(0) = 2,$$

故选 D.

3. 【答案】D

【解析】

【分析】

本题考查复数的几何意义及复数运算，同时考查复数的模及复数相等，还考查了共轭复数，属于基础题.

逐一判断求解即可.

【解答】

解：对于 A ，虚轴上的原点不表示纯虚数，故 A 错误；

对于 B ，当 $z_1 = i$ ， $z_2 = 1$ 时， $z_1^2 + z_2^2 = 0$ ，此时 $z_1^2 = -1$ ， $z_2^2 = 1$ ，故 B 错误；

对于 C ，当 $z_1 = 1$ ， $z_2 = i$ 时， $|z_1| = |z_2|$ ，此时 $z_1^2 = 1$ ， $z_2^2 = -1$ ，不满足 $z_1^2 = z_2^2$ ，故 C 错误；

对于 D ，设 $z = x + yi$ ， $x, y \in R$ ，由 $z + a = 2\bar{z} + bi$ ， $a, b \in R$ ，

得 $x + yi + a = 2(x - yi) + bi$ ，

所以 $\begin{cases} x + a = 2x \\ y = -2y + b \end{cases}$

则 $\bar{z} + a = x - yi + a = 2a - \frac{b}{3}i$ ，

$2z - bi = 2x + 2yi - bi = 2a - \frac{b}{3}i$ ，

所以 $\bar{z} + a = 2z - bi$ ，即 D 正确.

故选 D .

4. 【答案】 D

【解析】解： $y = 2a \ln x$ 的导数为 $y' = \frac{2a}{x}$ ，

由于直线 $y = 2x + b$ 是曲线 $y = 2a \ln x$ 的切线，

设切点为 (m, n) ，

则 $\frac{2a}{m} = 2$ ， $\therefore m = a$ ，

又 $2m + b = 2a \ln m$ ，

$\therefore b = 2a \ln a - 2a (a > 0)$ ，

$b' = 2(\ln a + 1) - 2 = 2 \ln a$ ，

当 $a > 1$ 时， $b' > 0$ ，函数 b 递增，

当 $0 < a < 1$ 时， $b' < 0$ ，函数 b 递减，

$\therefore a = 1$ 为极小值点，也为最小值点，

$\therefore b$ 的最小值为： $2 \ln 1 - 2 = -2$.

故选：D.

求出函数 $y = 2a\ln x$ 的导数，设切点为 (m, n) ，由条件得到 $\frac{2a}{m} = 2$ ， $2m + b = 2a\ln m$ ，即有 $b = 2a\ln a - 2a (a > 0)$ ，再对 b 求导，求出单调区间，极值也为最值，即可得到实数 b 的最小值.

本题考查利用导数研究过曲线上某点处的切线方程，考查利用导数求最值，考查数学转化思想方法，是中档题.

5. 【答案】C

【解析】

【分析】

本题考查根据函数的单调性求解参数范围的问题，需要根据题意求导，参变分离求函数的最值，属于基础题.

由题可知在 $[1, +\infty)$ 上 $f'(x) \geq 0$ 恒成立，再参变分离求解函数最值即可.

【解答】

解：由题意， $f'(x) = x - \frac{a}{x} + 1 \geq 0$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立，

即 $a \leq x^2 + x$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立.

又 $y = x^2 + x, x \in [1, +\infty)$ ，其导函数 $y' = 2x + 1 > 0$ 恒成立.

故 $y = x^2 + x, x \in [1, +\infty)$ 的最小值为 $y = 1^2 + 1 = 2$.

所以 $a \leq 2$.

故选：C

6. 【答案】D

【解析】

【分析】

本题考查导数知识的运用，解题的关键是构造函数，确定函数的单调性，从而求出函数的最值，属中档题.

将问题转化为求两个函数差的最小值对应的自变量 x 的值. 将两个函数作差，得到函数 $y = f(x) - g(x)$ ，再求此函数的最小值对应的自变量 x 的值即可求得答案.

【解答】

解：设函数 $y = f(x) - g(x) = x^2 - \ln x$ ，求导数得

$$y' = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x},$$

当 $0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $y' < 0$, 函数在 $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 上为单调递减函数,

当 $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $y' > 0$, 函数在 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$ 上为单调递增函数,

所以当 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, y 取得最小值为 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln 2$,

即当 $|MN|$ 达到最小时, t 的值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

故选 D.

7. 【答案】C

【解析】

【分析】

本题考查的知识要点: 线面夹角的应用, 异面直线的夹角的应用, 三棱柱的外接球的半径的求法, 主要考查学生的运算能力和转换能力及思维能力, 属于基础题型.

直接利用线面夹角的应用, 异面直线的夹角的应用, 三棱柱的外接球的半径的求法的应用求出结果.

【解答】

解: 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1,

对于选项 A: 直线 BC 与平面 ABC_1D_1 所成的角为 $\angle CBC_1 = \frac{\pi}{4}$, 故选项 A 正确.

对于选项 B: 点 C 到面 ABC_1D_1 的距离为 B_1C 长度的一半, 即 $h = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 故选项 B 正确.

对于选项 C: 易知 $BC_1 // AD_1$, 所以 $\angle AD_1C$ 为两条异面直线 D_1C 和 BC_1 所成的角, 易知 $\triangle AD_1C$ 等边三角形, 所以两条异面直线 D_1C 和 BC_1 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$, 故选项 C 错误.

对于选项 D: 三棱柱 $AA_1D_1 - BB_1C_1$ 外接球半径 $r = \frac{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 故选项 D 正确.

故选 C.

8. 【答案】D

【解析】

【分析】

本题考查利用导数研究函数的单调性和极值, 函数图象的应用, 属于基础题.

对 x 分类讨论, 分析 $f'(x)$ 的正负得到 $f(x)$ 的单调性, 进而判断出极值点即可.

【解答】

解：函数 $g(x) = (x-1)f'(x)$ 的图象知，

当 $x < -2$ 时， $x-1 < 0$ ， $g(x) < 0$ ，则 $f'(x) > 0$ ，函数 $f(x)$ 单调递增；

当 $-2 < x < 1$ 时， $x-1 < 0$ ， $g(x) > 0$ ，则 $f'(x) < 0$ ，函数 $f(x)$ 单调递减；

当 $1 < x < 2$ 时， $x-1 > 0$ ， $g(x) < 0$ ，则 $f'(x) < 0$ ，函数 $f(x)$ 单调递减；

当 $x > 2$ 时， $x-1 > 0$ ， $g(x) > 0$ ，则 $f'(x) > 0$ ，函数 $f(x)$ 单调递增。

所以函数 $f(x)$ 在 $(-2, 2)$ 上为减函数，在 $(-\infty, -2)$ ， $(2, +\infty)$ 上为增函数，故 A ， B 错误。

函数 $f(x)$ 的极大值为 $f(-2)$ ，极小值为 $f(2)$ ，故 C 错误， D 正确。

故选 D 。

9. 【答案】ABC

【解析】

【分析】

本题考查导数的概念、几何意义、运算，属于基础题。

根据导数的概念，几何意义，运算法则判断。

【解答】

解：A. $f'(x_0)$ 是函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 附近的瞬时变化率，故 A 错误；

B. 函数 $f(x) = \sin(-x)$ 的导数 $f'(x) = (-\sin x)' = -\cos x$ ，故 B 错误；

C. 求 $f'(x_0)$ 时，需先求 $f'(x)$ ，再令 $x = x_0$ 得到 $f'(x_0)$ ，如果先求 $f(x_0)$ ，求得 $[f(x_0)]' = 0$ ，故 C 错误；

D. 曲线的切线与曲线不一定只有一个公共点，正确。

故选 ABC 。

10. 【答案】ABD

【解析】

【分析】

本题考查了线面垂直的性质，线面平行的判定，异面直线所成的角及直线与平面所成的角，属于中档题。

A. 利用正方形的性质和线面垂直的性质与判定即可得出；

B. 利用线面所成角的定义判断即可；

C. 平移分别找到两个角的平面角，即可求解。

D. 根据二面角的定义找出平面角，即可求解。

【解答】

解：对于选项 A，由题意得 $SD \perp AC$ ， $AC \perp BD$ ， $SD \cap BD = D$ ， $\therefore AC \perp$ 平面 SBD ， $\because SB \subset$ 平面 SBD ， $\therefore AC \perp SB$ ，故 A 中结论正确；

对于选项 B，因为 $SD \perp$ 底面 $ABCD$ ，则 SA 与平面 ABD 所成的角为 $\angle SAD$

SC 与平面 ABD 所成的角为 $\angle SCD$ ，因为 $\tan \angle SAD = \frac{SD}{AD}$ ， $\tan \angle SCD = \frac{SD}{CD}$ ，因为 $AD = CD$ ，

所以 $\tan \angle SAD = \tan \angle SCD$ ，

则 $\angle SAD = \angle SCD$ ，故 B 中结论正确；

对于选项 C， $\because AB \parallel CD$ ， $\therefore AB$ 与 SC 所成的角是 $\angle SCD$ ， DC 与 SA 所成的角是 $\angle SAB$ ，

而这两个角显然不相等，故 C 中结论错误。

对于选项 D， $SD \perp BD$ ， $CD \perp BD$ ，则 $\angle BDC$ 为二面角 $B - SD - C$ 的平面角，又 $\angle BDC = 45^\circ$ ，

故 D 中结论正确。

故选 ABD。

11. 【答案】BD

【解析】

【分析】

本题主要考查导数的单调区间与极值最值问题，属于基础题. 首先要求导判断单调性，然后确定极值与最值即可

【解答】

解：对于 A，由 $f(x) = (2x - x^2)e^x$ ，得 $f'(x) = (2 - x^2)e^x$ ，当 $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 时，

$f'(x) > 0$ ，

$\therefore (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 是 $f(x)$ 的单调递增区间，故 A 错误；

对于 B，由 A 知， $f(x)$ 在 $(-\infty, -\sqrt{2})$ ， $(\sqrt{2}, +\infty)$ 上是减函数，在 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 上是增函数，

$\therefore f(-\sqrt{2})$ 是 $f(x)$ 的极小值， $f(\sqrt{2})$ 是 $f(x)$ 的极大值，故 B 正确；

对于 C，D， $\because$ 当 $x < -\sqrt{2}$ 时， $f(x) < 0$ 恒成立，在 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 单调递增，在 $(\sqrt{2}, +\infty)$ 上单调递减，

$\therefore$ 当 $x = \sqrt{2}$ 时， $f(x)$ 取得最大值，又当 $x \rightarrow +\infty$ 时， $f(x) \rightarrow -\infty$ ， $\therefore f(x)$ 无最小值，故 C 错误，D 正确。

故选 BD。

12. 【答案】AD

【解析】

【分析】

本题考查复数的四则运算，共轭复数以及复数的代数表示和几何意义，属于基础题.

利用复数的四则运算，共轭复数以及复数的代数表示和几何意义，逐一判断即可.

【解答】

解：对于 A ，设 $z = a + bi$ ， $a, b \in R$ ，则 $\bar{z} = a - bi$ ，

$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = 0$ ，可得 $a = b = 0$ ，所以 $z = 0$ ，故 A 正确；

对于 B ，若 $z_1 = 1 + i$ ， $z_2 = 1 - i$ ，则 $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$ ，此时 $z_1 z_2 \neq 0$ ，故 B 错误；

对于 C ，因为 $z = a + ai$ ($a \in R$)，有纯虚数的定义可知 z 不可能是纯虚数，故 C 错误；

对于 D ，若 $z \in C$ ，令 $z = a + bi$ ， $a, b \in R$ ，则 $z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$ ，

所以 $a^2 - b^2 = 3$ ， $2ab = 4$ ，所以 $\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases}$ ，

z 对应的点在第一象限或第三象限，所以 D 正确；

故选 AD .

13. 【答案】 $\sqrt{3}$

【解析】

【分析】

本题考查复数代数形式的乘除运算，考查了复数相等的条件以及复数模的求法，是基础题.

设 $z = a + bi$ ($a, b \in R$)，代入 $z^2 = -3$ ，由复数相等的条件列式求得 a, b 的值得答案.

【解答】解：由 $z + \frac{3}{z} = 0$ ，

得 $z^2 = -3$ ，

设 $z = a + bi$ ($a, b \in R$)，

由 $z^2 = -3$ ，得 $(a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi = -3$ ，

即 $\begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ 2ab = 0 \end{cases}$ ，解得： $\begin{cases} a = 0 \\ b = \pm \sqrt{3} \end{cases}$.

$\therefore z = \pm \sqrt{3}i$.

则 $|z| = \sqrt{3}$.

故答案为： $\sqrt{3}$.

14. 【答案】 $(-3, 12)$

【解析】

【分析】

本题考查函数极值的概念，考查函数存在极值点和导函数存在零点的关系，属于基础题.

先求 $f'(x) = x^2 + 4x - a$ ，所以该函数对称轴为： $x = -2$ ，所以 $(-1, 2)$ 在对称轴的右边，因为 $f(x)$ 在 $(-1, 2)$ 上存在极值点，即说明函数 $f'(x)$ 在该区间存在零点，所以

$$\begin{cases} f'(-1) = 1 - 4 - a < 0 \\ f'(2) = 4 + 8 - a > 0 \end{cases}, \text{解不等式组即得实数 } a \text{ 取值的集合.}$$

【解答】

解： $f'(x) = x^2 + 4x - a$ ，

$\therefore$ 该函数的对称轴是： $x = -2$ ，

$\because f(x)$ 在 $(-1, 2)$ 上存在极值点，即函数 $f'(x)$ 在该区间存在零点，且 $(-1, 2)$ 在 $x = -2$ 的右边，

$$\therefore \begin{cases} f'(-1) = 1 - 4 - a < 0 \\ f'(2) = 4 + 8 - a > 0 \end{cases}, \text{解得 } -3 < a < 12,$$

实数 a 的取值集合为： $(-3, 12)$.

故答案为 $(-3, 12)$.

15. 【答案】 ①②③

【解析】

【分析】

本题考查了空间直线与直线的关系，异面直线所成角，直线与平面所成角，利用空间向量求线线、线面的夹角，属于中档题.

根据已知中正方形 $ABCD$ 沿对角线 BD 折成直二面角，以 O 点为坐标原点建立空间坐标系，求出 $ABCD$ 各点坐标后，进而可以求出相关直线的方向向量及平面的法向量，然后代入线线夹角，线面夹角公式，分别计算即可得到答案.

【解答】

解：①如图取 BD 中点 O ，连接 AO 、 CO ，

易知 BD 垂直于平面 AOC ，由于 $AC \subset$ 平面 AOC ，

故 $BD \perp AC$ ；故①正确；

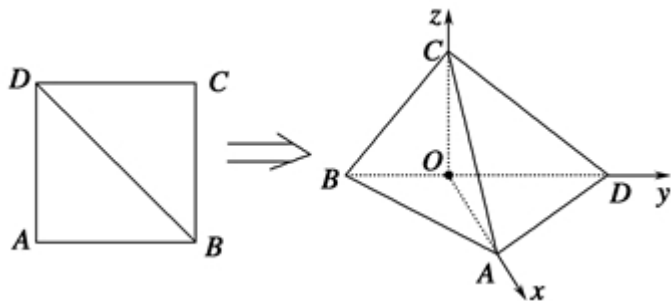
②如下图建立空间直角坐标系，设正方形边长为 a ，

则 $A(\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, 0)$ ， $B(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0)$ ，

故 $\overrightarrow{AB} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}a, -\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0)$, $C(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}a)$, $D(0, \frac{\sqrt{2}}{2}a, 0)$, 故 $\overrightarrow{CD} = (0, \frac{\sqrt{2}}{2}a, -\frac{\sqrt{2}}{2}a)$,

由两向量夹角公式得: $\cos \langle \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB} \rangle = -\frac{1}{2}$,

故两异面直线所成的角为 $\frac{\pi}{3}$; 故②正确;



③在直角三角形 AOC 中, 由 $AO = CO = \frac{\sqrt{2}}{2}a$

解得: $AC = \sqrt{2}AO = a$, 故三角形 ADC 为等边三角形. 故③正确;

④易知 $\angle ABO$ 即为直线 AB 与平面 BCD 所成的角, 可求得: $\angle ABO = 45^\circ$, 故④错.

故其中真命题是①②③.

故答案为①②③.

16. 【答案】-1

-2

【解析】

【分析】

本题考查了导数的几何意义和导数运算, 属于基础题.

根据导数的几何意义求出切点, 再分别求得 b 、 k 的值即可.

【解答】

解: 由题意令 $f'(x) = \frac{1}{x} = 1$, 故 $x = 1$,

则函数 $f(x)$ 上的切点为 $(1, 0)$, 代入 $y = x + b$, 得 $b = -1$,

令 $g'(x) = e^{x+k} = 1$, 故 $x = -k$,

则函数 $g(x)$ 上的切点为 $(-k, -k - 1)$, 代入 $g(x) = e^{x+k}$, 得 $k = -2$.

故答案为 -1 ; -2 .

17. 【答案】解: (1) $f'(x) = \frac{(e^x)' \cdot x - x' \cdot e^x}{x^2} = e^x \cdot \frac{x-1}{x^2}$;

(2) 设切点坐标为 $(x_0, \frac{e^{x_0}}{x_0})$,

因为切线平行于 x 轴, 故 $f'(x_0) = e^{-x_0} \cdot \frac{x_0 - 1}{x_0^2} = 0$

解得 $x_0 = 1$, 故切点坐标为 $(1, e)$

故处切线的方程为 $y - e = 0$;

【解析】 本题考查导数的运算和导数的几何意义, 属于基础题.

(1) 利用导数的运算法则即可求解;

(2) 利用导数的几何意义即可求解.

18. 【答案】 解: (1) $\because b$ 是方程 $x^2 - (6 + i)x + 9 + ai = 0 (a \in R)$ 的实根,

$$\therefore (b^2 - 6b + 9) + (a - b)i = 0,$$

$$\therefore \begin{cases} b^2 - 6b + 9 = 0, \\ a = b \end{cases} \text{ 解之得 } a = b = 3.$$

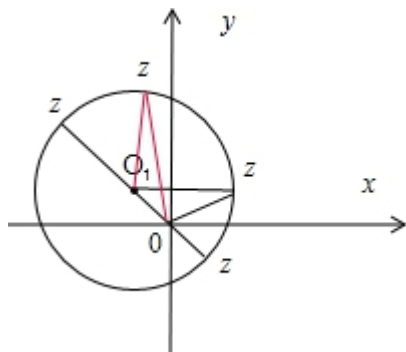
(2) 设 $z = x + yi (x, y \in R)$, 由 $|z - 3 + 3i| = 2|z|$,

$$\text{得 } (x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 4(x^2 + y^2),$$

$$\text{即 } (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 8,$$

$\therefore z$ 点的轨迹是以 $O_1(-1, 1)$ 为圆心, $2\sqrt{2}$ 为半径的圆, 如图所示,

如图,



当 z 点在 OO_1 的连线上时, $|z|$ 有最大值或最小值,

$$\because |OO_1| = \sqrt{2},$$

$$\text{半径 } r = 2\sqrt{2},$$

$\therefore$ 当 $z = 1 - i$ 时.

$|z|$ 有最小值, 且 $|z|_{\min} = \sqrt{2}$.

【解析】 本题考查复数相等, 考查复数和它的共轭复数, 复数的模, 复数的几何意义, 数形结合的思想方法, 是有一定难度的中档题目.

(1) 复数方程有实根, 方程化简为 $a + bi = 0 (a, b \in R)$, 利用复数相等, 即 $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$, 解

方程组即可.

(2)先把 a 、 b 代入方程, 同时设复数 $z = x + yi$, 化简方程, 根据表达式的几何意义, 方程表示圆, 再数形结合, 求出 z , 得到 $|z|$.

19.【答案】解: (I) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

因为 $f'(x) = (x - a)\ln x$,

当 $a = 0$ 时, $f'(e) = e$, $f(e) = \frac{1}{4}e^2$, 切线方程为 $y = ex - \frac{3}{4}e^2$,

令 $x = 0$, 解得 $y = -\frac{3}{4}e^2$,

令 $y = 0$, 解得 $x = \frac{3}{4}e$,

所以 $S = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4}e^2 \times \frac{3}{4}e = \frac{9}{32}e^3$;

(II) 若要存在 $x_0 \geq 1$ 使得 $f(x_0) < 0$,

则只需 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上的最小值小于 0 即可,

当 $a \leq 1$ 时, $f'(x) > 0$ 在 $(1, +\infty)$ 恒成立, 函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得最小值,

所以 $f_{\min}(x) = f(1) = -\frac{1}{4} + a < 0$, 解得 $a < \frac{1}{4}$,

当 $a > 1$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $[1, a)$ 上单调递减, 在 $[a, +\infty)$ 上单调递增,

则当 $x = a$ 时取得极小值也是最小值,

由 $f_{\min}(x) = f(a) = \frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{2}a^2 \ln a < 0$ 解得 $a > e^{\frac{3}{2}}$,

综上可得: a 的取值范围是 $(-\infty, \frac{1}{4}) \cup (e^{\frac{3}{2}}, +\infty)$.

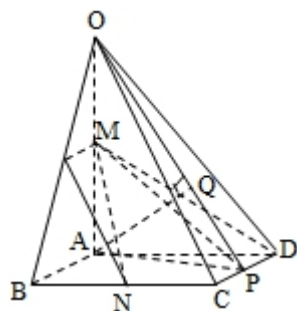
【解析】 本题考查导数的几何意义, 考查利用导数研究函数的单调性、极值、最值, 考查导数中恒成立与存在性问题, 考查分析与计算能力, 属于中档题.

(I) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 求导, 计算得切线方程为 $y = ex - \frac{3}{4}e^2$, 令 $x = 0$,

解得 $y = -\frac{3}{4}e^2$, 令 $y = 0$, 解得 $x = \frac{3}{4}e$, 即可求得切线与两坐标轴围成的三角形的面积;

(II) 若要存在 $x_0 \geq 1$ 使得 $f(x_0) < 0$, 则只需 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上的最小值小于 0 即可, 利用导数计算求解即可得到答案.

20.【答案】



解：方法一(综合法)

(1)取 OB 中点 E , 连接 ME , NE

$\because ME \parallel AB$, $AB \parallel CD$,

$\therefore ME \parallel CD$, 且 $ME \not\subset$ 平面 OCD , $CD \subset$ 平面 OCD ,

$\therefore ME \parallel$ 平面 OCD ,

又 $\because NE \parallel OC$, 且 $NE \not\subset$ 平面 OCD , $OC \subset$ 平面 OCD ,

$\therefore NE \parallel$ 平面 OCD ,

又 $\because ME \cap OE = E$, $ME, OE \subset$ 平面 MNE ,

$\therefore$ 平面 $MNE \parallel$ 平面 OCD , 且 $MN \subset$ 平面 MNE ,

$\therefore MN \parallel$ 平面 OCD

(2) $\because CD \parallel AB$,

$\therefore \angle MDC$ 为异面直线 AB 与 MD 所成的角(或其补角)

作 $AP \perp CD$ 于 P , 连接 MP ,

$\because OA \perp$ 平面 $ABCD$, $MP \subset$ 平面 $ABCD$,

$\therefore CD \perp MP$,

$\because \angle ADP = \frac{\pi}{4}$,

$\therefore DP = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $MD = \sqrt{MA^2 + AD^2} = \sqrt{2}$,

$\therefore \cos \angle MDP = \frac{DP}{MD} = \frac{1}{2}$, $\angle MDC = \angle MDP = \frac{\pi}{3}$,

所以 AB 与 MD 所成角的大小为 $\frac{\pi}{3}$.

(3) $\because AB \parallel$ 平面 OCD ,

$\therefore$ 点 A 和点 B 到平面 OCD 的距离相等, 连接 OP , 过点 A 作 $AQ \perp OP$ 于点 Q ,

$\because AP \perp CD$, $OA \perp CD$,

$\therefore CD \perp$ 平面 OAP , $\therefore AQ \perp CD$.

又 $\because AQ \perp OP$, $\therefore AQ \perp$ 平面 OCD , 线段 AQ 的长就是点 A 到平面 OCD 的距离,

$\therefore OP = \sqrt{OD^2 - DP^2} = \sqrt{OA^2 + AD^2 - DP^2} = \sqrt{4 + 1 - \frac{1}{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $AP = DP = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

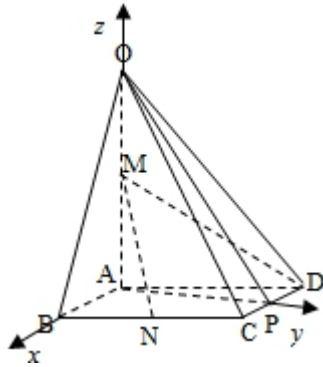
$$\therefore AQ = \frac{OA \cdot AP}{OP} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{3\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{3}, \text{ 所以点 } B \text{ 到平面 } OCD \text{ 的距离为 } \frac{2}{3}.$$

方法二(向量法)

作 $AP \perp CD$ 于点 P , 如图, 分别以 AB, AP, AO 所在直线为 x, y, z 轴建立坐标系:

$$A(0,0,0), B(1,0,0), P(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0), D(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0),$$

$$O(0,0,2), M(0,0,1), N(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, 0)$$



$$(1) \overrightarrow{MN} = (1 - \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, -1), \overrightarrow{OP} = (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -2), \overrightarrow{OD} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -2)$$

设平面 OCD 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$, 则 $\vec{n} \cdot \overrightarrow{OP} = 0, \vec{n} \cdot \overrightarrow{OD} = 0$

$$\text{即} \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}y - 2z = 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y - 2z = 0 \end{cases}$$

取 $z = \sqrt{2}$, 解得

$$\therefore \overrightarrow{MN} \cdot \vec{n} = (1 - \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, -1) \cdot (0, 4, \sqrt{2}) = 0,$$

且 $MN \not\subset$ 平面 OCD ,

$\therefore MN \parallel$ 平面 OCD .

(2) 设 AB 与 MD 所成的角为 θ ,

$$\therefore \overrightarrow{AB} = (1, 0, 0), \overrightarrow{MD} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -1)$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MD}|}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{MD}|} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}, \text{ } AB \text{ 与 } MD \text{ 所成角的大小为 } \frac{\pi}{3}.$$

(3) 设点 B 到平面 OCD 的距离为 d , 则 d 为 $\overrightarrow{OB}$ 在向量 $\vec{n} = (0, 4, \sqrt{2})$ 上的投影的绝对值,

$$\text{由 } \overrightarrow{OB} = (1, 0, -2), \text{ 得 } d = \frac{|\overrightarrow{OB} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{2}{3}$$

所以点 B 到平面 OCD 的距离为 $\frac{2}{3}$.

【解析】本题考查线面平行的证明，异面直线所成的角、点到平面距离的计算，考查空间想象能力，培养学生利用多种方法解决数学问题的能力，考查学生利用空间向量求直线间的夹角和距离的能力，属中档题。

方法一：(1)取 OB 中点 E ，连接 ME ， NE ，证明平面 $MNE \parallel$ 平面 OCD ，方法是两个平面内相交直线互相平行得到，从而得到 $MN \parallel$ 平面 OCD ；

(2) $\because CD \parallel AB$ ， $\therefore \angle MDC$ 为异面直线 AB 与 MD 所成的角(或其补角)作 $AP \perp CD$ 于 P ，连接 MP

$\because OA \perp$ 平面 $ABCD$ ， $\therefore CD \perp MP$ 菱形的对角相等得到 $\angle ABC = \angle ADC = \frac{\pi}{4}$ ，

利用菱形边长等于 1 得到 $DP = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，而 MD 利用勾股定理求得等于 $\sqrt{2}$ ，在直角三角形中，利用三角函数定义求出即可。

(3) $AB \parallel$ 平面 OCD ， $\therefore$ 点 A 和点 B 到平面 OCD 的距离相等，连接 OP ，过点 A 作 $AQ \perp OP$ 于点 Q ，

$\because AP \perp CD$ ， $OA \perp CD$ ， $\therefore CD \perp$ 平面 OAP ， $\therefore AQ \perp CD$ ，

又 $\because AQ \perp OP$ ， $\therefore AQ \perp$ 平面 OCD ，线段 AQ 的长就是点 A 到平面 OCD 的距离，求出距离可得。

方法二：(1)分别以 AB ， AP ， AO 所在直线为 x ， y ， z 轴建立坐标系，分别表示出 A ， B ， O ， M ， N 的坐标，

求出 $\overrightarrow{MN}$ ， $\overrightarrow{OP}$ ， $\overrightarrow{OD}$ 的坐标表示。设平面 OCD 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$ ，则 $\vec{n} \cdot \overrightarrow{OP} = 0$ ， $\vec{n} \cdot \overrightarrow{OD} = 0$ ，

解得 $\overrightarrow{MN} \cdot \vec{n} = (1 - \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, -1) \cdot (0, 4, \sqrt{2}) = 0$ ， $\therefore MN \parallel$ 平面 OCD

(2) 设 AB 与 MD 所成的角为 θ ，表示出 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{MD}$ ，利用 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha$ 求出即可。

(3) 设点 B 到平面 OCD 的距离为 d ，则 d 为 $\overrightarrow{OB}$ 在向量 $\vec{n} = (0, 4, \sqrt{2})$ 上的投影的绝对值，由 $\overrightarrow{OB} = (1, 0, -2)$ ，

得 $d = \frac{|\overrightarrow{OB} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{2}{3}$ ，所以点 B 到平面 OCD 的距离为 $\frac{2}{3}$ 。

21.【答案】解：(1) $f'(x) = \frac{1}{x} - 2$ ， $f'(1) = 1 - 2 = -1$ ， $g'(x) = -2ax + a$ ， $g'(1) = -$

$2a + a = -a$ ，

由题意知 $-a = -1$ ， $\therefore a = 1$ ，

$\therefore g(x) = -x^2 + x - 2$ ， $\therefore f(x) - g(x) = \ln x + x^2 - 3x + 2$ ，

$$\therefore [f(x) - g(x)]' = \frac{1}{x} + 2x - 3 = \frac{(x-1)(2x-1)}{x}, \quad x > 0,$$

$\therefore$ 当 $0 < x < \frac{1}{2}$ 或 $x > 1$ 时, $[f(x) - g(x)]' > 0$, 当 $\frac{1}{2} < x < 1$ 时, $[f(x) - g(x)]' < 0$,

$\therefore f(x) - g(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2}]$ 上是增函数, 在 $[\frac{1}{2}, 1]$ 上是减函数, 在 $[1, +\infty)$ 上是增函数,

$\therefore f(x) - g(x)$ 的极大值 $f(\frac{1}{2}) - g(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4} - \ln 2$, 极小值为 $f(1) - g(1) = 0$;

(2) $h(x) = f(x) - g(x) = ax^2 - (a+2)x + 2 + \ln x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$h'(x) = 2ax - (a+2) + \frac{1}{x} = \frac{2ax^2 - (a+2)x + 1}{x} = \frac{(2x-1)(ax-1)}{x},$$

当 $a \leq 0$ 时, $\because x > 0, \therefore ax - 1 < 0, \therefore 0 < x < \frac{1}{2}$ 时, $h'(x) > 0, x > \frac{1}{2}$ 时, $h'(x) < 0$,

$h(x)$ 的单调增区间为 $(0, \frac{1}{2})$, 单调减区间为 $(\frac{1}{2}, +\infty)$,

当 $0 < a < 2$ 时, $h'(x) > 0$ 的解集为 $(0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{a}, +\infty)$, $h'(x) < 0$ 解集为 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{a})$, $h(x)$

的单调增区间为 $(0, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{a}, +\infty)$, 单调减区间为 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{a})$,

当 $a = 2$ 时, $h'(x) \geq 0$, 当 $x = \frac{1}{2}$ 时取等号, $h(x)$ 的单调增区间为 $(0, +\infty)$,

当 $a > 2$ 时, $h'(x) > 0$ 解集为 $(0, \frac{1}{a}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$, $h'(x) < 0$ 解集为 $(\frac{1}{a}, \frac{1}{2})$, $h(x)$ 的单

调增区间为 $(0, \frac{1}{a})$, $(\frac{1}{2}, +\infty)$, 单调减区间为 $(\frac{1}{a}, \frac{1}{2})$,

综上, $a \leq 0$ 时, $h(x)$ 的单调增区间为 $(0, \frac{1}{2})$, 单调减区间为 $(\frac{1}{2}, +\infty)$,

$0 < a < 2$ 时, $h(x)$ 的单调增区间为 $(0, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{a}, +\infty)$, 单调减区间为 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{a})$,

$a = 2$ 时, $h(x)$ 的单调增区间为 $(0, +\infty)$, 没有减区间,

$a > 2$ 时, $h(x)$ 的单调增区间为 $(0, \frac{1}{a})$, $(\frac{1}{2}, +\infty)$, 单调减区间为 $(\frac{1}{a}, \frac{1}{2})$.

【解析】 (1) 根据切线相同, 求出 a , 代入求出 $f(x) - g(x)$, 再利用求导判断即可;

(2) 令 $h(x) = f(x) - g(x) = ax^2 - (a+2)x + 2 + \ln x$, 定义域为 $(0, +\infty)$, 求导并对 a 进行分类讨论, 判断单调性即可.

本题考查了导数法求切线方程, 导数法判断函数的单调性和极值, 含参问题分类讨论思想的应用, 中档题.

22. 【答案】解: (1)

因为 $f'(x) = \ln x + 2$,

令 $f'(x) > 0$, 得 $x > \frac{1}{e^2}$;

令 $f'(x) < 0$, 得 $0 < x < \frac{1}{e^2}$;

所以 $f(x)$ 的递增区间为 $(\frac{1}{e^2}, +\infty)$, $f(x)$ 的递减区间为 $(0, \frac{1}{e^2})$.

所以当 $x = \frac{1}{e^2}$ 时, 函数取值极小值,

极小值为 $f(\frac{1}{e^2}) = \frac{1}{e^2} \left(1 + \ln \frac{1}{e^2}\right) = -\frac{1}{e^2}$, 无极大值;

(2) 由(1)知, $f(x) = x(1 + \ln x)$, 所以 $k(x-1) < f(x)$ 对任意 $x > 1$ 恒成立,

即 $k < \frac{x+x\ln x}{x-1}$ 对任意 $x > 1$ 恒成立.

令 $g(x) = \frac{x+x\ln x}{x-1}$,

则 $g'(x) = \frac{x-\ln x-2}{(x-1)^2}$,

令 $h(x) = x - \ln x - 2 (x > 1)$,

则 $h'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} > 0$,

所以函数 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

因为 $h(3) = 1 - \ln 3 < 0$, $h(4) = 2 - 2\ln 2 > 0$,

所以方程 $h(x) = 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上存在唯一实根 $x_0 \in (3, 4)$,

当 $1 < x < x_0$ 时, $h(x) < 0$, 即 $g'(x) < 0$,

当 $x > x_0$ 时, $h(x) > 0$, 即 $g'(x) > 0$,

所以函数 $g(x) = \frac{x+x\ln x}{x-1}$ 在 $(1, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增.

所以 $[g(x)]_{\min} = g(x_0) = \frac{x_0(1+\ln x_0)}{x_0-1} = \frac{x_0(1+x_0-2)}{x_0-1} = x_0 \in (3, 4)$.

所以 $k < [g(x_0)]_{\min} = x_0 \in (3,4)$.

故整数 k 的最大值是 3.

【解析】 本题主要考查导数的几何意义，考查利用导数研究函数的单调性，极值，恒成立问题，属于较难题.

(1) 利用导数的几何意义即可求得函数 $f(x)$ 的图象在 $x = 1$ 处的切线方程；

(2) 求出函数的导数，令导函数大于零得出函数的增区间，导函数小于零得出函数的减区间，即可求得极值；

(3) 由 $k(x-1) < f(x)$ 对任意 $x > 1$ 恒成立，即 $k < \frac{x+x\ln x}{x-1}$ 对任意 $x > 1$ 恒成立. 令 $g(x) = \frac{x+x\ln x}{x-1}$ ，只要求其最小值即本题可解. 求导得 $g'(x) = \frac{x-\ln x-2}{(x-1)^2}$ ，令 $h(x) = x - \ln x - 2$ ($x > 1$) 易得存在唯一实根 $x_0 \in (3,4)$ ，使得当 $1 < x < x_0$ 时，即 $g'(x) < 0$ ，当 $x > x_0$ 时，即 $g'(x) > 0$ ，即可得 $[g(x)]_{\min} = g(x_0) = \frac{x_0(1+\ln x_0)}{x_0-1} = x_0 \in (3,4)$ ，从而得解.