# 江苏省仪征中学2020届高三上学期数学周末自助餐（文3）

班级__________ 学号__________ 姓名__________ 成绩__________

一、填空题：

1.设集合 $A=\{x||x-2|\leqslant 2\}, B=\{y|y=-x^2,-1\leqslant x\leqslant 2\}$,则 $A\cap B=$ __________.

2. 函数 $f(x)=(m^2-m-1)x^{m^2-2m-3}$ 是幂函数，且在 $x\in(0，+\infty)$上是减函数，则实数 $m$ 的值为______.

3. 已知 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且 $f(x+2)=-f(x)$，当 $2\leq x\leq 3$ 时，$f(x)=x$，则 $f(105.5)=$________.

4.已知 $x,y,z$ 都是大于 1 的正数，$m>0$，且 $\log_x m=24$，$\log_y m=40$，$\log_{xyz} m=12$，则 $\log_z m$ 的值为_______.

5.已知 $\dfrac{\tan\alpha}{\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}=-\dfrac{2}{3}$,则 $\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$ 的值是_________.

6.过点 $M(1,2)$ 的直线 $l$ 与圆 $C$：$(x-3)^2+(y-1)^2=9$ 相交于 $A$，$B$ 两点，若弦 $AB$ 的长为 $2\sqrt{5}$，则直线 $l$ 的方程为________________.

7. 已知 $a>0,b>0,a+b=1$，则 $(a+\dfrac{1}{a})(b+\dfrac{1}{b})$ 的最小值为_________.

8. 在△$ABC$ 中，点 $D$ 在线段 $BC$ 的延长线上，且$\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{CD}$，点 $O$ 在线段 $CD$ 上(与点 $C$，$D$ 不重合)，若$\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+(1-x)\overrightarrow{AC}$，则 $x$ 的取值范围是______________.

9.在 $\Delta ABC$ 中, $a,b,c$ 分别为角 $A,B,C$ 所对边的长, $S$ 为 $\Delta ABC$ 的面积$\cdot$若不等式 $kS\leqslant 3b^2+3c^2-a^2$ 恒成立,则实数 $k$ 的最大值为______.

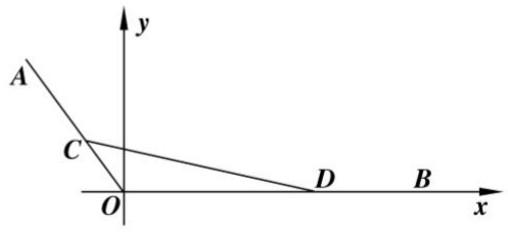
10.已知定义在 $R$ 上的偶函数 $f(x)$, 其导函数为 $f'(x)$. 当 $x\geqslant 0$ 时, 不等式 $xf'(x)+f(x)>1$ . 若对 $\forall x\in R$, 不等式 $e^xf(e^x)-axf(ax)>e^x-ax$ 恒成立, 则正整数 $a$ 的最大值是_____________.

二、解答题：

11.在平面直角坐标系 $xOy$ 中，已知点 $A(-3,4),B(9,0)$，$C$，$D$ 分别为线段 $OA$，$OB$ 上的动点，且满足 $AC=BD$.

（1）若 $AC=4$，求直线 $CD$ 的方程;

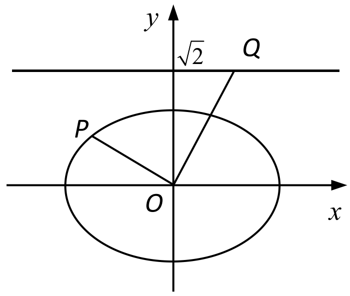
（2）证明：$\Delta OCD$ 的外接圆恒过定点(异于原点 $O$).



12.如图，在平面直角坐标系 $xOy$ 中，已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，焦点到相应准线的距离为 1．

（1）求椭圆的标准方程；

（2）若 $P$ 为椭圆上的一点，过点 $O$ 作 $OP$ 的垂线交直线 $y=\sqrt{2}$ 于点 $Q$，求 $\dfrac{1}{OP^2}+\dfrac{1}{OQ^2}$ 的值．



（第 12 题）

参考答案：

1.解析：$\because$ 集合 $A=\{x||x-2|\leqslant 2\}=\{x|0\leqslant x\leqslant 4\}$，$B=\{y|y=-x^2,-1\leqslant x\leqslant 2\}=\{x|-4\leqslant x\leqslant 0\}$，

$\therefore A\cap B=\{0\}$．

2.解析：由题意知 $m^2-m-1=1$，解得 $m=2$ 或 $m=-1$；当 $m=2$ 时，$m^2-2m-3=-3$，$f(x)=x^{-3}$ 符合题意，当 $m=-1$ 时，$m^2-2m-3=0$，$f(x)=x^0$ 不合题意．综上知 $m=2$.

3. 解析：由 $f(x+2)=-f(x)$，得 $f(x+4)=f[(x+2)+2]=-f(x+2)=-[-f(x)]=f(x)$，所以函数 $f(x)$ 的周期为 4，所以 $f(105.5)=f(4\times 27-2.5)=f(-2.5)=f(2.5)=2.5$.

4.解析：由已知得 $\log_m(xyz)=\log_m x+\log_m y+\log_m z=\frac{1}{12}$，而 $\log_m x=\frac{1}{24}$，$\log_m y=\frac{1}{40}$，故 $\log_m z=\frac{1}{12}-\log_m x-\log_m y=\frac{1}{12}-\frac{1}{24}-\frac{1}{40}=\frac{1}{60}$，即 $\log_z m=60$.

5.解：由 $\frac{\tan\alpha}{\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})}=\frac{\tan\alpha(1-\tan\alpha)}{\tan\alpha+1}=-\frac{2}{3}$,得 $\tan^2\alpha-5\tan\alpha-2=0$,解得 $\tan\alpha=2$，

$\tan\alpha=-\frac{1}{3}$,又 $\sin(2\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 2\alpha+\cos 2\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{2\tan\alpha+1-\tan^2\alpha}{\tan^2\alpha+1}$,

将 $\tan\alpha=2$ 或 $\tan\alpha=-\frac{1}{3}$ 分别代入上式,可得 $\sin(2\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{10}$．

6.解析：当直线 $l$ 的斜率不存在时，$x=1$，符合条件

当直线 $l$ 的斜率存在时，设直线 $l$ 方程为 $y-2=k(x-1)$

所以圆心到直线 $kx-y+2-k=0$ 的距离为 $\frac{|2k+1|}{\sqrt{k^2+1}}$，

由 $\left(\frac{|2k+1|}{\sqrt{k^2+1}}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{5}}{2}\right)^2=9$，解得 $k=\frac{3}{4}$，即直线 $l$ 的方程为 $3x-4y+5=0$

综上，所求直线 $l$ 的方程为 $x=1$ 或 $3x-4y+5=0$.

7. **解析**: $(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})=ab+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+\frac{1}{ab}=ab+\frac{a^2+b^2}{ab}+\frac{1}{ab}=ab+\frac{(a+b)^2-2ab}{ab}+\frac{1}{ab}$

$=ab+\frac{2}{ab}-2$，由于 $a>0,b>0,a+b=1\Rightarrow ab\in(0,\frac{1}{4}]$，而函数 $y=t+\frac{2}{t}-2$ 在 $t\in(0,\frac{1}{4}]$ 时单调递减，所以最小值是 $\frac{25}{4}$.

8. **解析**: 设 $\overrightarrow{CO}=y\overrightarrow{BC}$，$\because\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{AC}+y\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}+y(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=-y\overrightarrow{AB}+(1+y)\overrightarrow{AC}$.

$\because\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{CD}$，点 $O$ 在线段 $CD$ 上(与点 $C$，$D$ 不重合)，

$\therefore y\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$，$\because\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+(1-x)\overrightarrow{AC}$，$\therefore x=-y$，$\therefore x\in\left(-\frac{1}{3},0\right)$

9.解析：不等式 $kS\leqslant 3b^2+3c^2-a^2$ 恒成立,即 $k\leqslant\frac{3b^2+3c^3-a^2}{S}=\frac{2(3b^2+3c^3-a^2)}{bc\sin A}$ 恒成立,

又由余弦定理有 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,$\therefore k\leqslant\frac{4(b^2+c^2+bc\cos A)}{bc\sin A}$ 恒成立,$\therefore$ 只需 $k\leqslant[\frac{4(b^2+c^2+bc\cos A)}{bc\sin A}]_{min}$，

$\because\frac{4(b^2+c^2+bc\cos A)}{bc\sin A}\geq\frac{4(2bc+bc\cos A)}{bc\sin A}=\frac{4(2+\cos A)}{\sin A}$,当且仅当 $b=c$ 时取等号.

令 $f(x)=\frac{2+\cos x}{\sin x},x\in(0,\pi)$,则 $f'(x)=-\frac{1+2\cos x}{\sin^2 x}$,令 $f'(x)=0$,则 $x=\frac{2\pi}{3}$，

$\therefore$ 当 $0<x<\frac{2\pi}{3}$ 时,$f'(x)<0$；当 $\frac{2\pi}{3}<x<\pi$ 时,$f'(x)>0$，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,\frac{2\pi}{3})$ 上单调递减,在 $(\frac{2\pi}{3},\pi)$ 上单调递增,$\therefore$ 当 $x=\frac{2\pi}{3}$ 时,$f(x)_{min}=\sqrt{3}$．

故当 $A=\frac{2\pi}{3}$ 时,$(\frac{4(2+\cos A)}{\sin A})_{min}=4\sqrt{3}$,$\therefore k\leqslant 4\sqrt{3}$,$\therefore k$ 的最大值为 $4\sqrt{3}$．

10.解：因为$xf'(x)+f(x)>1$,即$xf'(x)+f(x)-1>0$,

令$F(x)=x[f(x)-1]$,则$F'(x)=xf'(x)+f(x)-1>0$,

又因为$f(x)$是在$R$上的偶函数,所以$F(x)$是在$R$上的奇函数,所以$F(x)$是在$R$上的单调递增函数,

又因为$e^xf(e^x)-axf(ax)>e^x-ax$,可化为$e^x[f(e^x)-1]>ax[f(ax)-1]$,即$F(e^x)>F(ax)$,

又因为$F(x)$是在$R$上的单调递增函数,所以$e^x-ax>0$恒成立,

令$g(x)=e^x-ax$,则$g'(x)=e^x-a$,所以$g(x)$在$(-\infty,\ln a)$单调递减,在$(\ln a,+\infty)$上单调递增,

所以$g(x)_{min}=a-a\ln a>0$,则$1-\ln a>0$,所以$0<a<e$．所以正整数$a$的最大值为$2$．

11.解析：(1) 因为$A(-3,4)$，所以$OA=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$，

又因为$AC=4$，所以$OC=1$，所以$C(-\frac{3}{5},\frac{4}{5})$，由$BD=4$，得$D(5,0)$，

所以直线$CD$的斜率$\dfrac{0-\frac{4}{5}}{5-\left(-\frac{3}{5}\right)}=-\frac{1}{7}$，所以直线$CD$的方程为$y=-\frac{1}{7}(x-5)$，即$x+7y-5=0$．

(2)设$C(-3m,4m)(0<m\leqslant 1)$，则$OC=5m$．则$AC=OA-OC=5-5m$，

因为$AC=BD$，所以$OD=OB-BD=5m+4$，所以$D$点的坐标为 $(5m+4,0)$

又设$\Delta OCD$的外接圆的方程为$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，

则有$\begin{cases}F=0,\\9m^2+16m^2-3mD+4mE+F=0,\\(5m+4)^2+(5m+4)D+F=0.\end{cases}$解之得$D=-(5m+4),F=0,E=-10m-3$,

所以$\Delta OCD$的外接圆的方程为$x^2+y^2-(5m+4)x-(10m+3)y=0$，

整理得$x^2+y^2-4x-3y-5m(x+2y)=0$，令$\begin{cases}x^2+y^2-4x-3y=0,\\x+2y=0\end{cases}$，

所以$\begin{cases}x=0,\\y=0.\end{cases}$（舍）或$\begin{cases}x=2,\\y=-1.\end{cases}$所以△$OCD$的外接圆恒过定点为$(2,-1)$．

12.解析：（1）由题意得，$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\frac{a^2}{c}-c=1$，

解得$a=\sqrt{2}$，$c=1$，$b=1$．所以椭圆的方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$．

（2）由题意知$OP$的斜率存在．

当$OP$的斜率为0时，$OP=\sqrt{2}$，$OQ=\sqrt{2}$，所以$\frac{1}{OP^2}+\frac{1}{OQ^2}=1$．

当$OP$的斜率不为0时，设直线$OP$方程为$y=kx$．

由$\begin{cases}\frac{x^2}{2}+y^2=1,\\y=kx,\end{cases}$得$(2k^2+1)x^2=2$，解得$x^2=\frac{2}{2k^2+1}$，所以$y^2=\frac{2k^2}{2k^2+1}$，

所以$OP^2=\frac{2k^2+2}{2k^2+1}$．因为$OP\perp OQ$，所以直线$OQ$的方程为$y=-\frac{1}{k}x$．

由$\begin{cases}y=\sqrt{2},\\y=-\frac{1}{k}x\end{cases}$得$x=-\sqrt{2}k$，所以$OQ^2=2k^2+2$．

所以$\frac{1}{OP^2}+\frac{1}{OQ^2}=\frac{2k^2+1}{2k^2+2}+\frac{1}{2k^2+2}=1$．综上，可知$\frac{1}{OP^2}+\frac{1}{OQ^2}=1$．