# 江苏省仪征中学 2020-2021 学年第二学期

# 高二数学周练（1）

**一、单项选择题（本大题共 8 小题，共 40.0 分）**

1. 抛物线$y=4x^2$的焦点坐标是(    )

A. $(0,1)$　　B. $(0,\frac{1}{16})$　　C. $(1,0)$　　D. $(\frac{1}{16},0)$

2. 若复数 $z$ 满足$z\cdot(2+i)=z\cdot(1-i)+5$，则关于复数 $z$ 的说法正确的是(    )

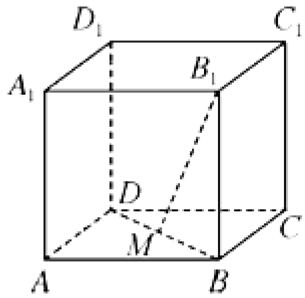
A. 复数 $z$ 的实部为 1　　B. 复数 $z$ 的虚部为 0

C. 复数 $z$ 的模长为 1　　D. 复数 $z$ 对应的复平面上的点在第一象限

3. 若“$\forall x\in(1,4]$，$x^2-2ax+9>0$”是假命题，则实数 $a$ 的取值范围为(    )

A. $(-\infty,3]$　　B. $[3,+\infty)$　　C. $(3,+\infty)$　　D. $[5,+\infty)$

4. 在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，已知 $M$ 是 $BD$ 的中点，则$B_1M$与平面$AA_1D_1D$所成角的余弦值为(    )




A. $\frac{\sqrt{6}}{6}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $-\frac{\sqrt{30}}{6}$　　D. $\frac{\sqrt{30}}{6}$

5. 已知$F_1$，$F_2$是椭圆和双曲线的公共焦点，$P$ 是它们的一个公共点，且$\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{3}$，记椭圆和双曲线的离心率分别为$e_1$，$e_2$，则$\frac{1}{2e_1e_2}$的最大值为(    )

A. $\frac{3}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　D. 1

6. 若曲线$f(x)=\frac{e^{x-2}}{ax+1}$在点$\big(1,f(1)\big)$处的切线过点$(-1,0)$，则函数$f(x)$的单调递减区间为(    )

A. $(-\infty,0)$　　B. $(0,+\infty)$，$(-1,0)$

C. $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$　　D. $(-\infty,-1),(-1,0)$

7. 在数列$\{a_n\}$中，若$a_1=1$，$a_2=\frac{1}{2}$，$\frac{2}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+2}}\left(n\in N^*\right)$，设数列$\{b_n\}$满足$\log_2 b_n=\frac{1}{a_n}\left(n\in N^*\right)$，则$\{b_n\}$的前$n$项和$S_n$为(    )

A. $2^n-1$　　B. $2^n-2$　　C. $2^{n+1}-1$　　D. $2^{n+1}-2$

8. 定义在$(0,+\infty)$上的函数$f(x)$满足$xf'(x)+1>0$，$f(3)=-ln3$，则不等式$f(e^x)+x>0$的解集为(    )

A. $(e^3,+\infty)$　　B. $(0,e^3)$　　C. $(ln3,+\infty)$　　D. $(ln3,e^3)$

二、多项选择题（本大题共 4 小题，共 20.0 分）

9. 下列四种说法中正确的有(    )

A. 命题“$\forall x\in R$，$3^x>x^2+1$”的否定是“$\exists x\in R$，$3^x<x^2+1$”；

B. 若不等式$ax^2+bx+1>0$的解集为$\{x|-1<x<3\}$，则不等式$3ax^2+6bx+5<0$的解集为$(-\infty,-1)\cup(5,+\infty)$

C. 复数 $z$ 满足$|z-2i|=1$，$z$ 在复平面对应的点为$(x,y)$，则$x^2+(y-2)^2=1$

D. 已知$p:\frac{1}{2}\le x\le 3$，$q:x^2-\left(a+\frac{1}{a}\right)x+1\le 0(a>0)$，若 $p$ 是 $q$ 的充分不必要条件，则实数 $a$ 的取值范围是$\left(0,\frac{1}{3}\right]\cup[3,+\infty)$

10. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{a_n}{2+3a_n}(n\in N^*)$，则下列结论正确的有(    )

A. $\{\frac{1}{a_n}+3\}$为等比数列　　B. $\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\frac{1}{2^{n+1}-3}$

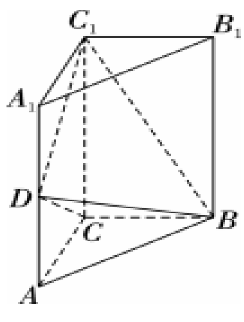
C. $\{a_n\}$为递减数列　　D. $\{\frac{1}{a_n}\}$的前 $n$ 项和$T_n=2^{n+2}-3n+4$

11. 已知抛物线 $C$：$y=\frac{1}{4}x^2$，过焦点 $F$ 的直线交抛物线 $C$ 于$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$两点，直线$AO,BO$分别于直线 $m$：$y=-2$相交于$M,N$两点.则下列说法正确的是(    )

A. 焦点 $F$ 的坐标为(0,2)　　B. $y_1y_2=1$

C. $|\overrightarrow{FA}|\cdot|\overrightarrow{FB}|$的最小值为 4　　D. $\Delta AOB$与$\Delta MON$的面积之比为定值

12. 如图，直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AC=BC=1$，$AA_1=2$，$D$是$AA_1$的中点，$DC_1\perp BD$.则(    )




A. 直线$DC_1$与 $BC$ 所成角为$90°$

B. 三棱锥$D-BCC_1$的体积为$\frac{1}{3}$

C. 二面角$A_1-BD-C_1$的大小为$60°$

D. 直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$外接球的表面积为$6\pi$

三、填空题（本大题共 4 小题，共 20.0 分）

13. 函数$f(x)=e^x sinx+1$的图象在点$(0,f(0))$处的切线的方程是______ .

14. 椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{m}=1$的离心率为$\frac{1}{2}$，则$m=$______.

15. 过抛物线$C: y^2=2px(p>0)$的焦点作一条直线 $l$ 与双曲线$\frac{x^2}{3}-y^2=1$的一条渐近线平行，且 $l$ 交抛物线 $C$ 于 $A$，$B$ 两点，若$|AF|=2>|BF|$，则 $p$ 的值为_____.

16. 已知函数$f(x)=\frac{a}{x}+x\ln x$，$g(x)=x^3-x^2-5$，若对于任意的$x_1, x_2\in\left[\frac{1}{2},2\right]$，都有$f(x_1)-g(x_2)\geqslant 2$成立，则实数 $a$ 的取值范围是______.

**四、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分）**

17. 已知复数$z=3+bi(b\in R)$，且$(1+3i)\cdot z$为纯虚数.

(1)求复数 $z$ 及$\overline{z}$；　　　　(2)若$\omega=\frac{z}{2+i}$，求复数$\omega$的模$|\omega|$.

18. 已知函数$f(x)=x\ln x$.

(1)求曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程；

(2)求$f(x)$的单调区间；

19.设函数 $f(x)=ae^x\ln x+\frac{be^{x-1}}{x}$.

(1)求导函数 $f'(x)$；

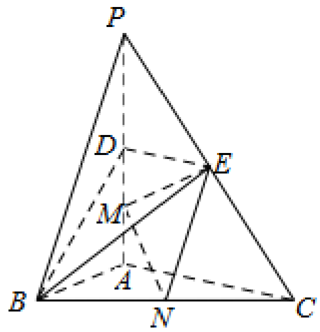
(2)若曲线 $y=f(x)$在点(1，$f(1)$)处的切线方程为 $y=e(x-1)+2$，求 $a$，$b$ 的值.

20. 已知函数$f(x) = lnx + (a-1)x + 1(a \in R)$，讨论函数$f(x)$的单调性.

21. 如图，在三棱锥$P-ABC$中，$PA \perp$底面$ABC$，$\angle BAC = 90°$.点$D$，$E$，$N$分别为棱$PA$，$PC$，$BC$的中点，$M$是线段$AD$的中点，$PA = AC = 4$，$AB = 2$.

(1)求二面角$C-EM-N$的正弦值；

(2)已知点$H$在棱$PA$上，且直线$NH$与直线$BE$所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{7}}{7}$，求线段$AH$的长.




22. 已知椭圆$C_1$：$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$，$P_1(1,1)$，$P_2(0,2)$，$P_3(\frac{\sqrt{3}}{2},-1)$，$P_4(\frac{\sqrt{3}}{2},1)$四点中恰有三点在椭圆$C_1$上，抛物线$C_2$：$y^2 = 2px(p > 0)$焦点到准线的距离为$\frac{1}{2}$.

(1)求椭圆$C_1$、抛物线$C_2$的方程；

(2)过椭圆$C_1$右顶点$Q$的直线$l$与抛物线$C_2$交于点$A$、$B$，射线$OA$、$OB$分别交椭圆$C_1$于点$M$、$N$.

$(i)$证明：$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$为定值；

$(ii)$记△$AOB$、△$MON$的面积分别为$S_1$、$S_2$，求$\frac{S_1}{S_2}$的最小值.

## 高二数学周练（1）答案

1. $B$　2. $A$　3. $B$　4. $D$　5. $B$　6. $D$　7. $D$

8. $C$　9. $BCD$　10. $ABC$　11. $BCD$　12. $ABD$

13. $x-y+1=0$　14. 3 或$\frac{16}{3}$

15. $2-\sqrt{3}$　16. $[1,+\infty)$

17. 解：(1)由已知得$(1+3i)(3+bi)=(3-3b)+(9+b)i$，

$\because (1+3i)z$是纯虚数，

$\therefore 3-3b=0$且$9+b\neq 0$，则$b=1$，从而$z=3+i$．$\overline{z}=3-i$，

(2)由(1)知$\omega=\frac{z}{2+i}=\frac{3+i}{2+i}=\frac{(3+i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{7}{5}-\frac{i}{5}$，

$\therefore |\omega|=\sqrt{(\frac{7}{5})^2+(-\frac{1}{5})^2}=\sqrt{2}$．

18. 解：(Ⅰ)因为函数$f(x)=xlnx$，

所以$f'(x)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$，

$f'(1)=ln1+1=1$．

又因为$f(1)=0$，

所以曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为$y=x-1$．

(Ⅱ)函数$f(x)=xlnx$定义域为$(0,+\infty)$，

由(Ⅰ)可知，$f'(x)=lnx+1$．

令$f'(x)=0$，解得$x=\frac{1}{e}$．

$f(x)$与$f'(x)$在区间$(0,+\infty)$上的情况如下：

| $x$ | $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ | $\frac{1}{e}$ | $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | ↓ | 极小值 | ↑ |

故$f(x)$的增区间为$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$，减区间为$\left(0,\frac{1}{e}\right)$．

19.(1)由 $f(x)=ae^x\ln x+\frac{be^{x-1}}{x}$，

得 $f'(x)=(ae^x\ln x)'+\left(\frac{be^{x-1}}{x}\right)'=ae^x\ln x+\frac{ae^x}{x}+\frac{be^{x-1}x-be^{x-1}}{x^2}$.

(2)由于切点既在曲线 $y=f(x)$上，又在切线 $y=e(x-1)+2$ 上，

将 $x=1$ 代入切线方程得 $y=2$，将 $x=1$ 代入函数 $f(x)$得 $f(1)=b$，

$\therefore b=2$.将 $x=1$ 代入导函数 $f'(x)$中，

得 $f'(1)=ae=e$，∴$a=1$.

20. 解：$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，

所以由$f(x)=\ln x+(a-1)x+1$得：

$f'(x)=\frac{1}{x}+(a-1)=\frac{1+(a-1)x}{x}$，

当$a\geq 1$时，$f'(x)>0$，函数$f(x)$在区间$(0,+\infty)$上单调递增；

当$a<1$时，记$g(x)=1+(a-1)x$，

则函数$g(x)=1+(a-1)x$在区间$(-\infty,+\infty)$上单调递减，令$g(x)=0\Rightarrow x=\frac{1}{1-a}$，

所以当$x\in\left(0,\frac{1}{1-a}\right)$时，$g(x)>0$，即$f'(x)>0$，函数$f(x)$在区间$\left(0,\frac{1}{1-a}\right)$上单调递增；

当$x\in\left(\frac{1}{1-a},+\infty\right)$时，$g(x)<0$，即$f'(x)<0$，函数$f(x)$在区间$\left(\frac{1}{1-a},+\infty\right)$上单调递减.

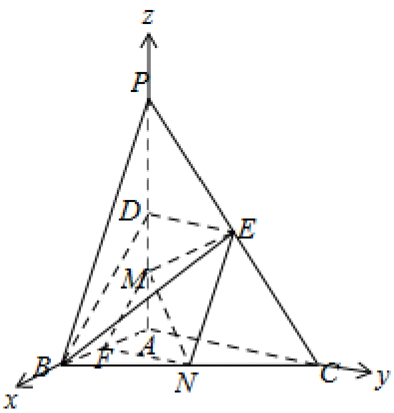
综上所述可知：

当$a\geq 1$时，函数$f(x)$在区间$(0,+\infty)$上单调递增；

当$a<1$时，函数$f(x)$在区间$\left(0,\frac{1}{1-a}\right)$上单调递增；在区间$\left(\frac{1}{1-a},+\infty\right)$上单调递减.

21. (1)解：∵ $PA\perp$底面 $ABC$，$\angle BAC=90°$.

∴以 $A$ 为原点，分别以 $AB$、$AC$、$AP$ 所在直线为 $x$、$y$、$z$ 轴建立空间直角坐标系.




∵ $PA=AC=4$，$AB=2$，

∴ $A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$C(0,4,0)$，$M(0,0,1)$，$N(1,2,0)$，$E(0,2,2)$，

则$\overrightarrow{MN}=(1,2,-1)$，$\overrightarrow{ME}=(0,2,1)$，

设平面 $MEN$ 的一个法向量为$\vec{m}=(x,y,z)$，

由$\begin{cases}\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{MN}=0\\\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{ME}=0\end{cases}$，得$\begin{cases}x+2y-z=0\\2y+z=0\end{cases}$，

取$z=2$，得$\overrightarrow{m}=(4,-1,2)$．

由图可得平面 $CME$ 的一个法向量为$\overrightarrow{n}=(1,0,0)$．

$\therefore\cos<\overrightarrow{m},\overrightarrow{n}>=\frac{\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{m}||\overrightarrow{n}|}=\frac{4}{\sqrt{21}\times1}=\frac{4\sqrt{21}}{21}$.

由图可知二面角$C-EM-N$的平面角为锐角，

∴二面角$C-EM-N$的余弦值为$\frac{4\sqrt{21}}{21}$，则正弦值为$\frac{\sqrt{105}}{21}$；

(2)解：设$AH=t$，则$H(0,0，t)$，$\overrightarrow{NH}=(-1,-2,t)$，$\overrightarrow{BE}=(-2,2,2)$．

∵直线 $NH$ 与直线 $BE$ 所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{7}}{7}$，

$$\therefore|\cos<\overrightarrow{NH},\overrightarrow{BE}>|=|\frac{\overrightarrow{NH}\cdot\overrightarrow{BE}}{|\overrightarrow{NH}||\overrightarrow{BE}|}|$$

$=|\frac{2t-2}{\sqrt{5+t^2}\times2\sqrt{3}}|=\frac{\sqrt{7}}{7}$.

解得：$t=4$．

∴当 $H$ 与 $P$ 重合时直线 $NH$ 与直线 $BE$ 所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{7}}{7}$，此时线段 $AH$ 的长为 4．

22. 解：(Ⅰ)∵$C_1$关于 $x$ 轴对称，$P_3$、$P_4$关于 $x$ 轴对称，

$\therefore P_3$、$P_4$在$C_1$上，

$\therefore\frac{3}{4b^2}+\frac{1}{a^2}=1$，

若$P_1$在$C_1$上，则$\frac{1}{b^2}+\frac{1}{a^2}>\frac{3}{4b^2}+\frac{1}{a^2}=1$，

$\therefore P_1$不在$C_1$上，$P_2$在$C_1$上，

$\therefore a=2$，

$\therefore b=1$，

$\therefore C_1$：$\frac{y^2}{4}+x^2=1$，

因为抛物线$C_2$：$y^2=2px(p>0)$焦点到准线的距离为$\frac{1}{2}$.

所以$p=\frac{1}{2}$，

$\therefore y^2=x$；

(Ⅱ)$(i)$证明：

设 $l$：$x=my+1$，代入$y^2=x$中，得$y^2-my-1=0$，

$\therefore y_1+y_2=m$，$y_1y_2=-1$，

$\therefore\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2={y_1}^2y_2^2+y_1y_2=0$；

$(ii)$设直线 $OA$：$x=m_1y(m_1>0)$，

将直线 $OA$ 代入$C_1$中得：$y^2(4m_1^2+1)=4\Rightarrow y_M=\frac{2}{\sqrt{4m_1^2+1}}$，

同理得$y_N=\frac{2|m_1|}{\sqrt{m_1^2+4}}$，

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|}{\frac{1}{2}|OM|\cdot|ON|}$$
$$=\frac{|OA|\cdot|OB|}{|OM|\cdot|ON|}$$
$$=\frac{|y_1|}{|y_M|}\cdot\frac{|y_2|}{|y_N|}$$
$$=\frac{|y_1y_2|}{|y_My_N|}$$
$$=\frac{\sqrt{4m_1^2+1}\cdot\sqrt{m_1^2+4}}{4|m_1|}$$

$=\frac{1}{4}\cdot\sqrt{4m_1^2+\frac{4}{m_1^2}+17}\geq\frac{1}{4}\cdot\sqrt{2\sqrt{16}+17}=\frac{5}{4}$,

当且仅当$m_1^2=\frac{1}{m_1^2}$，即$m_1=1$时取等.