江苏省仪征中学 2019-2020 学年第一学期高三数学
中档大题训练（6）　　10.18

班级 ______________　　　　　　姓名______________

1．设命题 p：函数 $f(x)=\lg(ax^2-4x+a)$的定义域为 R；命题 q：不等式 $2x^2+x>2+ax$，在 $x\in(-\infty，-1)$上恒成立，如果命题"$p\vee q$"为真命题，命题"$p\wedge q$"为假命题，求实数 a 的取值范围.

2. 设函数 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c), a,b,c\in \mathbf{R}$、 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数．

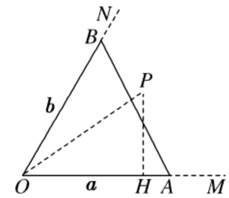
（1）若 $a=b=c$，$f(4)=8$，求 a 的值；

（2）若 $a\neq b$，$b=c$，且 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 的零点均在集合 $\{-3,1,3\}$ 中，求 $f(x)$ 的极小值；

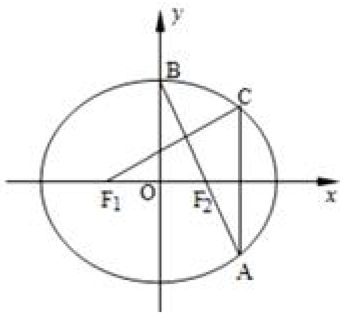
3．如图所示，有两条道路 OM 与 ON，$\angle MON=60°$，现要铺设三条下水管道 OA，OB，AB(其中 A，B 分别在 OM，ON 上)，若下水管道的总长度为 3 km.设 $OA=a$ km，$OB=b$ km.

(1)求 b 关于 a 的函数表达式，并指出 a 的取值范围；

(2)已知点 P 处有一个污水总管的接口，点 P 到 OM 的距离 PH 为$\frac{\sqrt{3}}{4}$ km，到点 O 的距离 PO 为$\frac{\sqrt{7}}{4}$ km，问下水管道 AB 能否经过污水总管的接口点 P？若能，求出 a 的值，若不能，请说明理由.



4. .如图所示，在平面直角坐标系 xOy 中，F_1,F_2 分别是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的左、右焦点，顶点 B 的坐标为 $\left(0,b\right)$，连接 BF_2 并延长交椭圆于点 A，过点 A 作 x 轴的垂线交椭圆于另一点 C，连接 F_1C．



（1）若点 C 的坐标为 $\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{1}{3}\right)$，且 $BF_2=\sqrt{2}$，求椭圆的方程；

（2）若 $F_1C\perp AB$ 求椭圆离心率 e 的值.

江苏省仪征中学2019-2020学年第一学期高三数学
中档大题训练（6）答案　　10.18

1．试题解析：命题 p:等价于对于函数ax^2-4x+a，需满足Δ<0 且$a>0$,即$a>2$；命题 q:

等价于$a>\dfrac{2x-2}{x+1}$

对∀x∈(-∞,-1),上恒成立,而函数$y=\dfrac{2x-2}{x+1}$为增函数且∀x∈(-∞,-1) 有$\dfrac{2x-2}{x+1}<1$，要使

$a>\dfrac{2x-2}{x+1}$对∀x∈(-∞,-1),上恒成立，必须有$a\geq 1$.又“$p\vee q$”为真命题,命题“$p\wedge q$”为假命题,等价于p,q一真一假.故$1\leq a\leq 2$.

2．（1）因为$a=b=c$，所以 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)=(x-a)^3$．

因为 $f(4)=8$，所以$(4-a)^3=8$，

解得$a=2$．

（2）因为$b=c$，

所以 $f(x)=(x-a)(x-b)^2=x^3-(a+2b)x^2+b(2a+b)x-ab^2$，

从而 $f'(x)=3(x-b)\left(x-\dfrac{2a+b}{3}\right)$．令 $f'(x)=0$，得$x=b$或$x=\dfrac{2a+b}{3}$．

因为$a,b,\dfrac{2a+b}{3}$都在集合$\{-3,1,3\}$中，且$a\neq b$，

所以$\dfrac{2a+b}{3}=1,a=3,b=-3$．

此时 $f(x)=(x-3)(x+3)^2$， $f'(x)=3(x+3)(x-1)$．

令 $f'(x)=0$ ，得 $x=-3$ 或 $x=1$.

列表如下：

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以 $f(x)$ 的极小值为 $f(1)=(1-3)(1+3)^2=-32$.

3．解：(1)∵$OA+OB+AB=3$，∴$AB=3-a-b$.

∵$\angle MON=60°$，由余弦定理，得

$AB^2=a^2+b^2-2ab\cos 60°$.

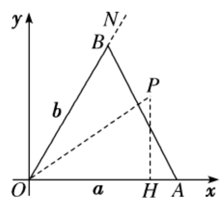
∴$(3-a-b)^2=a^2+b^2-ab$.

整理，得 $b=\dfrac{2a-3}{a-2}$.

由 $a>0$，$b>0,3-a-b>0$，及 $a+b>3-a-b$，$a+3-a-b>b$，$b+3-a-b>a$，得 $0<a<\dfrac{3}{2}$.

综上，$b=\dfrac{2a-3}{a-2}$，$0<a<\dfrac{3}{2}$.

(2)以 O 为原点，OM 为 x 轴，建立如图所示的直角坐标系.



∵$PH=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，$PO=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$，

∴点 $P\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

假设 AB 过点 P，∵$A(a,0)$，$B\left(\dfrac{1}{2}b,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}b\right)$，

即 $B\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2a-3}{a-2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{2a-3}{a-2}\right)$，

∴直线 AP 方程为 $y=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{2}-a}(x-a)$，即 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2-4a}(x-a)$.

将点 B 代入，得 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{2a-3}{a-2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2-4a}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2a-3}{a-2}-a\right)$.

化简，得 $6a^2-10a+3=0$.∴$a=\frac{5\pm\sqrt{7}}{6}$.

$a=\frac{5\pm\sqrt{7}}{6}\in\left(0,\ \frac{3}{2}\right)$.

答：下水管道 AB 能经过污水总管的接口点 P，此时 $a=\frac{5\pm\sqrt{7}}{6}$ (km).

4. 设椭圆的焦距为 $2c$ ，则 $F_1\left(-c,0\right),F_2\left(c,0\right)$.

（1）$\because B\left(0,b\right),\therefore BF_2=\sqrt{b^2+c^2}=a$ ，又 $BF_2=\sqrt{2}$,故 $a=\sqrt{2}$，

$\because$ 点 $c\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$ 在椭圆上，$\therefore\frac{\frac{16}{9}}{a^2}+\frac{\frac{1}{9}}{b^2}=1$，解得 $b^2=1$,故所求椭圆的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

（2）$\because B\left(0,b\right),F_2\left(c,0\right)$ 在直线 AB 上，$\therefore$ 直线 AB 的方程为 $\frac{x}{c}+\frac{y}{b}=1$,

解方程组 $\left\{\begin{array}{l}\frac{x}{c}+\frac{y}{b}=1\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\end{array}\right.$ 得 $\left\{\begin{array}{l}x_1=\frac{2a^2c}{a^2+c^2}\\ y_1=\frac{b\left(c^2-a^2\right)}{a^2+c^2}\end{array}\right.$，$\left\{\begin{array}{l}x_2=0\\ y_2=b\end{array}\right.$，$\therefore$ 点 A 的坐标为 $\left(\frac{2a^2c}{a^2+c^2},\frac{b\left(c^2-a^2\right)}{a^2+c^2}\right)$,

又 AC 垂直于 x 轴，由椭圆的对称性，可得点 C 的坐标为 $\left(\frac{2a^2c}{a^2+c^2},\frac{b\left(a^2-c^2\right)}{a^2+c^2}\right)$，

$\because$ 直线 F_1C 的斜率为 $\frac{\frac{b\left(a^2-c^2\right)}{a^2+c^2}-0}{\frac{2a^2c}{a^2+c^2}-\left(-c\right)}=\frac{b\left(a^2-c^2\right)}{3a^2c+c^2}$ ，

直线 AB 的斜率为 $-\frac{b}{c}$ ，且 $F_1C\perp AB$ ，$\therefore\frac{b\left(a^2-c^2\right)}{3a^2c+c^2}\cdot\left(-\frac{b}{c}\right)=-1$,又 $b^2=a^2-c^2$ ，

整理得 $a^2=5c^2$,故 $e^2=\frac{1}{5}$ ，因此 $e=\frac{\sqrt{5}}{5}$.