落实高考评价体系 考查数学关键能力

——2020年新高考数学试题简评与赏析

王芝平

(北京宏志中学 100013)

今年的高考不仅是恢复高考四十多年来首次因故延期一个月的高考,也是山东、海南、北京与天津新高考综合改革落地的首考,从全国(港、澳、台除外)范围看,更是取消考试大纲与考试说明的第一次高考,因此今年的新高考数学试题比往年更令人关注.

1 正视现实,"稳"字当头

因疫情等原因,各地高三学生高考前的半年基本是通过线上学习备考,与往常师生面对面的学习有较大的不同,其次今年又是新高考首考落地之年.针对这些特殊情况,本着创新是方向,稳定是主流的原则,试题设计平和、中正,难度有所降低,给考生亲切、平和的感觉,较好地把握了稳定与创新、传承与改革的关系,给能力层次不同的考生创设了充分展示自己才华的空间,有利于平复考生的心理情绪,使考生尽快进入考试的最佳状态,保证数学能力水平得以正常发挥,彰显人文关怀.

新高考数学试卷中有大量的基础性试题,所涉及到的知识都是教科书中最基础、最核心的主干内容,是进入高等学校的考生在面对与数学相关的生活实践或学习探索问题情境时,高质量地认识问题、分析问题所必需具备的数学知识,是培养数学关键能力、达成数学素养的基础.试题平而不俗,无难题、怪题和偏题,无刁难考生之意,与日常教学比较吻合,起点低、入手宽、多层次、高落差,体现了基础性、综合性、应用性和创新性的考查要求.

新高考数学卷稳中有变,渐变求善.如新高考Ⅰ卷、Ⅱ卷(山东用Ⅰ卷、海南用Ⅱ卷)的"多选题"为数学基础和数学能力在不同层次上的考生提供了发挥的空间,增加了考生的得分机会;"结构不良问题"具有较大的开放性,对数学理解能力、数学探究能力的考查是深刻的,引导考生从"死记硬背""机械刷题""题海战术"式的解题转向基于深度理解的问题解决、策略选择,使数学关键能力与学科素养得到有效考查.

2 联系实际,立德铸魂

落实立德树人根本任务是高考的核心功能之一.新高考数学试题将重大的社会热点事件有机融入试题,通过设计真实的问题情境,展现我国社会主义建设的伟大成就与科学防疫、环境治理、脱贫攻坚的重大成果,使考生从中感受到我国的制度优势、综合国力、文化底色,旨在激励青年学子的历史使命、责任担当、价值追求,使立德树人、以考育人等落在实处.

例1(新高考Ⅰ卷第6题) 基本再生数R_0与世代间隔T是新冠肺炎的流行病学基本参数.基本再生数指一个感染者传染的平均人数,世代间隔指相邻两代间传染所需的平均时间.在新冠肺炎疫情初始阶段,可以用指数模型:$I(t)=e^{rt}$描述累计感染病例数$I(t)$随时间t(单位:天)的变化规律,指数增长率r与R_0,T近似满足$R_0=1+rT$.有学者基于已有数据估计出$R_0=3.28$,$T=6$.据此,在新冠肺炎疫情初始阶段,累计感染病例数增加1倍需要的时间约为($\ln 2\approx 0.69$)( )

A. 1.2天 B. 1.8天

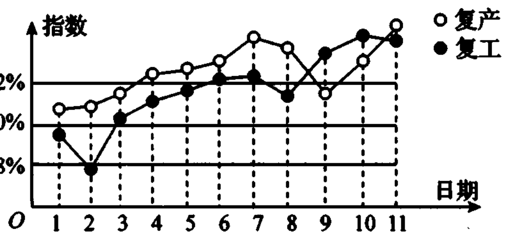
C. 2.5天 D. 3.5天

解析 因为$R_0=3.28$,$T=6$,由$R_0=1+rT$得$3.28=1+6r$,即$r=0.38$.所以$I(t)=e^{0.38t}$.由$2=e^{0.38t}$得$0.38t=\ln 2\approx 0.69$,即$t\approx 1.816$.选B.

在流行病学研究中,一般认为流行病在流行

的初级阶段如果没有人工干预，感染人数会呈指数增长．本题基于新冠肺炎疫情初始阶段累计感染病例数的数学模型的研究成果，引入流行病学中的 2 个基本参数——基本再生数 R_0（在发病初期，当所有人均为易感者时，一个病人在其平均患病期内所传染的人数）与世代间隔 T（每繁殖一代所需要的时间），通过统计模型描述在一定时期内累计感染病例数随时间的变化规律，考查从资料中提取数学信息的能力，考查对数概念及数学运算素养，考查借助数学模型解决实际问题的能力．通过了解流行病的传播规律，感受医务人员为防控新冠肺炎所做出的巨大牺牲和我国为国际疫情防控所做出的努力，引导考生体会科学、精准、严格的防控措施的重大意义和大国担当．

例 2（新高考Ⅱ卷第 9 题）我国新冠肺炎疫情进入常态化，各地有序推进复工复产，下面是某地连续 11 天复工复产指数折线图，下列说法正确的是（　　）



A. 这 11 天复工指数和复产指数均逐日增加

B. 这 11 天期间，复产指数增量大于复工指数的增量

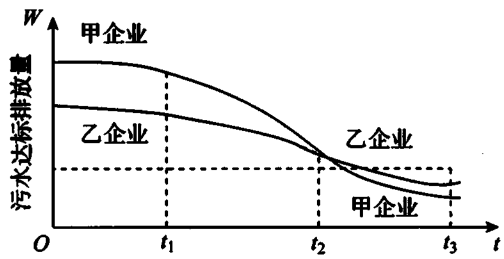
C. 第 3 天至第 11 天复工复产指数均超过 80%

D. 第 9 天至第 11 天复产指数增量大于复工指数的增量

解析　由图可知，A 显然是错误的；第一天复产指数与复工指数的差明显大于第十一天复产指数与复工指数的差，所以 B 是错误的；C 显然是对的；第 9 天的复工指数大于其复产指数，而第 11 天的复工指数小于其复产指数，所以 D 也是对的．

本题以今年社会热点——疫情常态化后的有序复工复产复学——为背景，情境与数据真实，考查学生解读统计图以及提取信息的能力．试题展示了我国防控新冠疫情取得的成果，彰显立德树人的教育宗旨．

例 3（北京卷第 15 题）为满足人民对美好生活的向往，环保部门要求相关企业加强污水治理，排放未达标的企业要限期整改．设企业的污水排放量 W 与时间 t 的关系为 $W=f(t)$，用 $-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 的大小评价在 $[a,b]$ 这段时间内企业污水治理能力的强弱．已知整改期内，甲、乙两企业的污水排放量与时间的关系如下图所示．



给出下列四个结论：

①在 $[t_1,t_2]$ 这段时间内，甲企业的污水治理能力比乙企业强；

②在 t_2 时刻，甲企业的污水治理能力比乙企业强；

③在 t_3 时刻，甲、乙两企业的污水排放量都已达标；

④甲企业在 $[0,t_1]$，$[t_1,t_2]$，$[t_2,t_3]$ 这三段时间中，在 $[0,t_1]$ 的污水治理能力最强．

其中所有正确结论的序号是________．

解析　本题源自人教 A 版高中数学教科书选修 2—2，第 10 页第 1 题．考题首先给出了评价企业在 $[a,b]$ 这段时间内污水治理能力强弱的指标：函数在该区间上的函数"平均变化率"的相反数，其几何意义是经过这段曲线两端点的直线的斜率相反数．由图可知，①对，④不对；因为平均变化率的极限就是导数，所以企业在某一时刻的污水治理能力可以用该点处的切线斜率的相反数来刻画．所以由图可知，在 t_2 时刻，甲企业的污水治理能力比乙企业强是正确的，即②是对的；③显然是正确的．所以填①②③．

污水治理能够保护珍贵的水资源，减少环境污染，构建绿色环保的社会环境，是一项功在当代，利在千秋的重要工程．本题情境真实，紧密贴近现实生活，增强青年学子的社会责任感、使命感，凸显立德树人价值导向．

例4(新高考Ⅰ、Ⅱ卷第19题) 为加强环境保护,治理空气污染,环境监测部门对某市空气质量进行调研,随机抽查了100天空气中的PM2.5和SO_2浓度(单位:$\mu g/m^3$),得下表:

SO_2 / PM2.5	[0,50]	(50,150]	(150,475]
[0,35]	32	18	4
(35,75]	6	8	12
(75,115]	3	7	10

(Ⅰ)估计事件"该市一天空气中PM2.5浓度不超过75,且SO_2浓度不超过150"的概率;

(Ⅱ)根据所给数据,完成下面的2×2列联表;

SO_2 / PM2.5	[0,150]	(150,475]
[0,75]		
(75,115]		

(Ⅲ)根据(Ⅱ)中的列联表,判断是否有99%的把握认为该市一天空气中PM2.5浓度与SO_2浓度有关?

附:$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,

$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

解析 (Ⅰ)由表格可知,该市100天中,空气中的PM2.5浓度不超过75,且SO_2浓度不超过150的天数有32+6+18+8=64天,所以该市一天中,空气中的PM2.5浓度不超过75,且SO_2浓度不超过150的概率为$\dfrac{64}{100}=0.64$;

(Ⅱ)由所给数据,可得2×2列联表为:

SO_2 / PM2.5	[0,150]	(150,475]	合计
[0,75]	64	16	80
(75,115]	10	10	20
合 计	74	26	100

(Ⅲ)根据2×2列联表中的数据可得

$$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\frac{100(64\times10-16\times10)^2}{80\times20\times74\times26}=\frac{3600}{481}\approx7.4844>6.635.$$

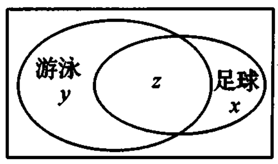
根据临界值表可知,有99%的把握认为该市一天空气中PM2.5浓度与SO_2浓度有关.

生态文明建设是人类永续发展的根本大计,人类只有保持与自然环境之间的平衡与协调,才能生存与发展.本题以当前社会关心的空气质量状况为背景,给出了某市100天空气中的PM2.5和SO_2浓度表,重点考查考生对概率统计基本思想和统计模型的理解和运用.考查数据整理、分析信息的能力和对统计结论的解释等,考查学以致用的能力和数据分析素养.

例5(新高考Ⅱ卷第6题) 3名大学生利用假期到2个山村参加扶贫工作,每名大学生只去1个村,每个村至少1人,则不同的分配方案共有(　　)

A. 4种　B. 5种　C. 6种　D. 8种

本题设计源于教科书,注重基础知识,聚焦决战决胜脱贫攻坚,情境具有鲜明的时代气息,较好地实现了立德树人的根本任务.



例6(新高考Ⅰ、Ⅱ卷第5题) 某中学的学生积极参加体育锻炼,其中有96%的学生喜欢足球或游泳,60%的学生喜欢足球,82%的学生喜欢游泳,则该中学既喜欢足球又喜欢游泳的学生数占该校学生总数的比例是(　　)

A. 62%　B. 56%　C. 46%　D. 42%

解析 假设该中学有100名学生,并设其中只喜欢足球的学生有x人,只喜欢游泳的学生有y人,两个项目都喜欢的学生有z人.由题意可得$x+y+z=96$,$x+z=60$,$y+z=82$,解得$z=46$.所以该中学既喜欢足球又喜欢游泳的学生数占该校学生总数的比例是46%.

本题以考生喜闻乐见的体育运动为背景,在考查分析问题、解决问题能力的同时,激发考生参

加体育运动的兴趣，增强健康意识，有利于培养健全人格、锤炼意志，珍爱生命、热爱生活等核心价值.

这样的试题引导考生自觉地置身于现实社会的大环境中，用数学眼光审视纷纭复杂的自然现象，用数学思维分析其中的数学本质，并用数学语言描述事物表象背后所蕴含的客观规律．试题从不同的视角体现了全国人民防控疫情、决战决胜脱贫攻坚取得的成就，体现了党中央加强生态文明建设“打赢蓝天保卫战”的意志和决心，体现了高考的育人功能．

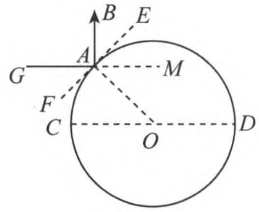
3　经典入题，弘扬文化

优秀传统文化是人类文明的根脉，积淀着世界各族人民最深沉的精神追求，是立德树人、繁衍发展的文化基因．数学承载着思想与文化，是人类文明的重要组成部分．新高考试题关注数学文化育人的价值，重视全面育人的要求，既发挥数学在培养学生理想信念和爱国情怀等方面的重要作用，又注意吸收世界数学文化的精华，引导学生胸怀祖国，放眼世界.

例 7(新高考Ⅰ、Ⅱ卷第 4 题) 日晷是中国古代用来测定时间的仪器，利用与晷面垂直的晷针投射到晷面的影子来测定时间. 把地球看成一个球(球心记为 O)，地球上一点 A 的纬度是指 OA 与地球赤道所在平面所成角，点 A 处的水平面是指过点 A 且与 OA 垂直的平面．在点 A 处放置一个日晷，若晷面与赤道所在平面平行，点 A 处的纬度为北纬 $40°$，则晷针与点 A 处的水平面所成角为(　　)

A. $20°$　B. $40°$　C. $50°$　D. $90°$

解析　把地球看成是一个球，如图，画出通过晷针与球心的平面截这个球而得的截面图——大圆，其中 CD 表示赤道所在平面与截面的交线，EF 是点 A 处的水平面的截线，AB 是晷针所在直线，GM 是晷面的截线.



依题意，$OA\perp EF$，$GM/\!/CD$，$AB\perp GM$. 又 $\angle AOC=40°$，所以 $\angle OAM=40°$. 所以 $\angle BAE=\angle OAM=40°$，即晷针与点 A 处的水平面所成角为 $\angle BAE=40°$. 故选 B.

本题以“日晷”测时为背景，考查数学抽象、直观想象、数学建模、逻辑推理、数学运算等核心素养．“日晷”这种利用太阳光的投影来计时的方法是人类在天文计时领域的重大发明，这项发明被人类沿用达几千年之久，反映了我国古代悠久灿烂的文明成就，有利于增强学生民族自豪感.

例 8(北京卷第 10 题) 2020 年 3 月 14 日是全球首个国际圆周率日(πDay). 历史上，求圆周率 π 的方法有多种，与中国传统数学中的“割圆术”相似，数学家阿尔·卡西的方法是：当正整数 n 充分大时，计算单位圆的内接正 $6n$ 边形的周长和外切正 $6n$ 边形(各边均与圆相切的正 $6n$ 边形)的周长，将它们的算术平均数作为 2π 的近似值．按照阿尔·卡西的方法，π 的近似值的表达方式是(　　)

A. $3n(\sin\frac{30°}{n}+\tan\frac{30°}{n})$

B. $6n(\sin\frac{30°}{n}+\tan\frac{30°}{n})$

C. $3n(\sin\frac{60°}{n}+\tan\frac{60°}{n})$

D. $6n(\sin\frac{60°}{n}+\tan\frac{60°}{n})$

解析　如图 1，设 A，B 是单位圆 O 内接正 $6n$ 边形的相邻的两个顶点，则 $\angle AOB=\frac{2\pi}{6n}=\frac{\pi}{3n}$. 在 $\triangle AOB$ 中，由余弦定理，得

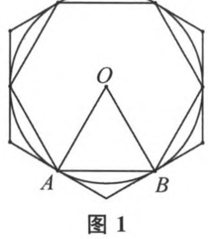


图 1

$$AB^2=1+1-2\cos\frac{\pi}{3n}=4\sin^2\frac{\pi}{6n},$$

所以 $AB=2\sin\frac{\pi}{6n}$，

所以该圆内接正 $6n$ 边形的周长等于 $12n\sin\frac{\pi}{6n}$.

如图2，设 C 是与点 A，B 相邻的该单位圆外切正 $6n$ 边形的一个顶点，在 $\triangle AOC$ 中，$AC=\tan\frac{\pi}{6n}$，所以外切正 $6n$ 边形的边长等于 $2\tan\frac{\pi}{6n}$. 所以该圆外切正 $6n$ 边形的周长等于 $12n\tan\frac{\pi}{6n}$.

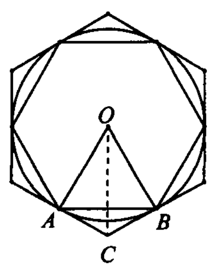


图2

因此这两个周长的算术平均数为 $6n(\sin\frac{\pi}{6n}+\tan\frac{\pi}{6n})$，故 π 的近似值的表达方式是 $3n(\sin\frac{\pi}{6n}+\tan\frac{\pi}{6n})$. 选A.

π 几乎是一个众所周知的数学常数，在数学和自然科学以及建筑科学中是无处不在的．只要涉及与圆有关的几何量的计算，就不可避免地借助于 π. 华裔数学家陈省身就曾感慨道："π 这个数渗透了整个数学"，也有人说："π 是一首无穷无尽的歌". 而"圆周率的精确度可以作为衡量一个国家数学水平的标志"(德国数学家康托尔). 这虽有些夸张，也足见人们对圆周率精确度锲而不舍的精神追求.

本题虽然只涉及初中平面几何知识，但是结论的探索过程可以激发学生理性思考：为什么可以这样求 π 的近似值呢？事实上，由三角函数的学习过程可知，在弧度制下，当正数 x 非常小时，$\sin x\approx x$ 且 $\tan x\approx x$. 所以

$$3n(\sin\frac{\pi}{6n}+\tan\frac{\pi}{6n})\approx 3n(\frac{\pi}{6n}+\frac{\pi}{6n})=\pi.$$

这些试题与经典名题有关，背景涉及古今中外，考查逻辑思维、运算求解、空间想象、数学建模和创新等数学关键能力，考查理性思维、数学应用、数学探索、数学文化等数学学科素养．在开阔学生视野的过程中，使考生接受数学文化的熏陶，感受数学思想和方法的魅力，体会数学的广泛应用性，领略无处不在的数学美．

4 题在书外，根在书中

进入高校学习的学生必须牢固掌握数学基础知识与基本思想方法，所以新高考试卷中有一定比例的基础性试题，且与教科书内容紧密相连，贴近中学教学实际．一方面许多试题素材来源于教材，另一方面解题思想方法也根植于教科书，旨在引导学生筑牢数学根基，掌握解决问题的基本工具，引导中学数学教学回归教科书.

例9(新高考Ⅰ卷第13题) 斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线过抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点，且与 C 交于 A，B 两点，则 $|AB|=$________.

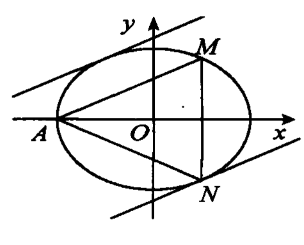
此题与人教A版数学教科书选修2－1第69页的例4(斜率为1的直线 l 经过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F，且与抛物线相交于 A，B 两点，求线段 AB 的长) 完全相同．其求解过程完全可以根据例4的解题过程进行.(解法略)

例10(新高考Ⅱ卷第22题) 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 过点 $M(2,3)$，点 A 为其左顶点，且 AM 的斜率为 $\frac{1}{2}$.

(Ⅰ)求 C 的方程；(Ⅱ)点 N 为椭圆 C 上任意一点，求 $\triangle AMN$ 的面积的最大值.

解析 (Ⅰ)C 的方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.

(Ⅱ)设与直线 AM 平行的直线方程为 $l:x-2y=m$，当直线 l 与椭圆相切时，与 AM 距离比较远的直线 l 与椭圆的切点为 N，此时 $\triangle AMN$ 的面积取得最大值.



由 $x-2y=m$ 与 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ 联立消去 x 得，$16y^2+12my+3m^2-48=0$，由 $\Delta=144m^2-4\times16(3m^2-48)=0$，解得 $m=\pm8$. 所以与直线 AM 距离比较远的直线为 l：$x-2y=8$. 直线 AM 与 l 间的距离为 $d=\frac{8+4}{\sqrt{1+4}}=\frac{12\sqrt{5}}{5}$，又 $|AM|=3\sqrt{5}$，所以$\triangle AMN$ 的面积的最大值为 $\frac{1}{2}\times3\sqrt{5}\times\frac{12\sqrt{5}}{5}=18$.

此题与人教A版数学教科书选修2－1第47页例7本质相同.

新高考数学试题的设计注重数学课程学习情境，多数试题与教科书中例、习题相近，是考生比较熟悉的问题类型，体现了“题中书外，根在书中”的命题理念，并且突出考查通性通法，淡化特殊技巧，重视对数学基础知识、基本技能、基本思想以及基本思维活动经验的考查.

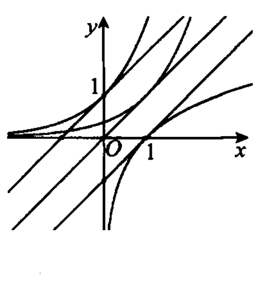
5 突出理性，考查能力

数学是一门思维科学，是培养学生理性思维的重要载体. 数学核心素养的灵魂是理性思维，新高考数学卷将关键能力与理性思维、数学应用、数学探究、数学文化等数学学科素养聚焦于数学理性思维的主线之上，突出考查理性思维与关键能力.

例11(新高考Ⅰ卷第21题) 已知函数 $f(x)=ae^{x-1}-\ln x+\ln a$.

(Ⅰ)略；(Ⅱ)若 $f(x)\geqslant1$，求 a 的取值范围.

(Ⅱ)**解析** 由函数 $f(x)$ 的解析式中涉及到两个重要而基本的函数模型 e^x 与 $\ln x$，容易联想到人教A版高中数学教科书选修2-2上的结论：$e^x>x+1(x\neq0)$，$\ln x<x<e^x$. 因为教科书要求“通过函数图象直观验证”，如果考生对此题有“创新取向的变式研究”的过程，那么他们会得到结论



$e^{x-1}-\ln x\geqslant1$. 也就是说当 $a=1$ 时，$f(x)\geqslant1$ 恒成立，再由对数函数性质和不等式性质易知，当 $a\geqslant1$ 时，$f(x)\geqslant e^{x-1}-\ln x\geqslant1$ 恒成立.

借助于图形直观，既得到了 $f(x)\geqslant1$ 成立的充分条件，也为我们指明了代数证明的方向与思路：

令 $g(x)=e^{x-1}-\ln x(x>0)$，则 $g'(x)=e^{x-1}-\frac{1}{x}$ 是增函数，且 $g'(1)=0$，所以 $g'(x)<0\Leftrightarrow0<x<1$；$g'(x)>0\Leftrightarrow x>1$. 即 $g(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上是减函数，在区间 $(1,+\infty)$ 上是增函数，所以 $g(x)$ 的最小值是 $g(1)=1$，即 $e^{x-1}-\ln x\geqslant1$. 所以当 $a\geqslant1$ 时，$f(x)\geqslant e^{x-1}-\ln x\geqslant1$ 恒成立.

当 $0<a<1$ 时，因为 $ae^{x-1}<e^{x-1}$，$\ln a<0$，所以 $f(x)<e^{x-1}-\ln x$ 恒成立. 特别地，$x=1$ 时，$f(1)<1$. 即 $f(x)\geqslant1$ 不恒成立，所以 $0<a<1$ 不合题意. 亦即若要 $f(x)\geqslant1$ 恒成立，其必要条件是 $a\geqslant1$.

所以实数 a 的取值范围为 $[1,+\infty)$.

本题设计注重数学课程学习情境与探索创新情境，考生可以借助几何图形发现解题方向，再用严谨的代数方法进行逻辑推理，既基于感性，又发展理性，较好地考查了直观想象、逻辑思维、运算求解等关键能力.

本题简约而不简单，深刻而不深奥，其本质在于用严谨的代数方法证明学生通过图象直观感知到的不等式链：$e^{x-1}\geqslant x>x-1\geqslant\ln x$. 求解思路的发现与规范有序的代数证明使考生体会到代数方法的严谨与威力，有利于学生形成重论据、有条理、合乎逻辑的思维品质，养成以理服人的理性思维习惯.

例12(北京卷第20题) 已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 过点 $A(-2,-1)$，且 $a=2b$.

(Ⅰ)求椭圆 C 的方程；(Ⅱ)过点 $B(-4,0)$ 的直线 l 交椭圆 C 于点 M，N，直线 MA，NA 分别交直线 $x=-4$ 于点 P，Q，求 $\frac{|PB|}{|BQ|}$ 的值.

解析 (Ⅰ)$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$；

(Ⅱ)$|PB|$ 与 $|BQ|$ 的取值分别随点 M，N 的位置的变化而变化，点 M，N 的位置又随着直线 l 的变化而变化，即一切皆因直线 l 的变化而变化，

所以刻画直线 l 的位置的参数就是主元，即目标函数的自变量.

设问方式可以让考生预感到 $\frac{|PB|}{|BQ|}$ 是一个定值，如果能先知道这个定值，那么后续的探索就有了较为明确的方向．因为事物的一般性通过其特殊性表现出来，所以不妨先考虑直线 l 与 x 轴重合的情况，此时直线 l 与椭圆相交于椭圆的左、右顶点．如图1，作 $AH\perp x$ 轴于 H，可以证明 $|PB|=|BQ|$. 所以 $|PB|=|BQ|$ 就成了一般情况下要证明的结论，它为运算求解创设了有利条件．

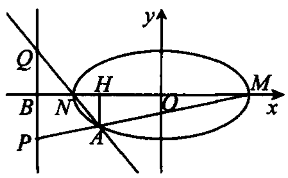


图 1

当直线 l 与 x 轴不重合时，如图2，设其方程为 $x=ty-4$.

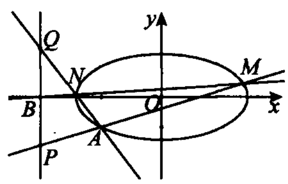


图 2

由 $\begin{cases}x=ty-4,\\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1\end{cases}$ 消去 x 得 $(t^2+4)y^2-8ty+8=0$.

当 $\Delta\geqslant 0$ 时，设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

则 $y_1+y_2=\frac{8t}{t^2+4}$，$y_1y_2=\frac{8}{t^2+4}$.

直线 AM 的方程为 $y=\frac{y_1+1}{x_1+2}(x+2)-1$，

令 $x=-4$，得 $y_P=\frac{-2(y_1+1)}{x_1+2}-1$.

同理 $y_Q=\frac{-2(y_2+1)}{x_2+2}-1$.

显然，点 P，Q 在 x 轴的异侧，

不妨设 $y_P>0$，则 $y_Q<0$.

所以 $|y_P|-|y_Q|=y_P+y_Q$

$$=\frac{-2(y_1+1)}{x_1+2}-1+\frac{-2(y_2+1)}{x_2+2}-1$$

$$=-\frac{2(y_1+1)(x_2+2)+2(y_2+1)(x_1+2)}{(x_1+2)(x_2+2)}-2.$$

而 $(y_1+1)(x_2+2)+(y_2+1)(x_1+2)+(x_1+2)(x_2+2)$

$=(y_1+1)(ty_2-2)+(y_2+1)(ty_1-2)+(ty_1-2)(ty_2-2)$

$=(t+2)[ty_1y_2-(y_1+y_2)]$

$=(t+2)\left[t\times\frac{8}{t^2+4}-\frac{8t}{t^2+4}\right]=0.$

所以 $|y_P|-|y_Q|=0$，即 $|PB|=|BQ|$，

所以 $\frac{|PB|}{|BQ|}=1$. 综上，$\frac{|PB|}{|BQ|}=1$.

本题立足基础，强调综合，解法既异彩纷呈，又突出通性通法．但如果没有借助于特殊情形猜出这个比值，而是直接计算 $\frac{|PB|}{|BQ|}=\frac{\left|\frac{x_1+2y_1+4}{x_1+2}\right|}{\left|\frac{x_2+2y_2+4}{x_2+2}\right|}$，则极易思路受阻、迷失方向．

若能根据运动变化中的特殊瞬间(即直线 l 与 x 轴重合)猜测出 $\frac{|PB|}{|BQ|}=1$，则将问题转化为证明 $|PB|=|BQ|$，对应的代数关系可以为 $\frac{-2(y_1+1)}{x_1+2}-1=-\frac{-2(y_2+1)}{x_2+2}+1$，即 $\frac{-2(y_1+1)}{x_1+2}-1+\frac{-2(y_2+1)}{x_2+2}-1=0$，这就为使用“根与系数的关系”创造了条件，转化成自己所熟悉的问题，从而成功突破本题的难点．

因此，在平时的教学中，要引导学生动手实践，根据直观图形、特殊情形，对所求结论进行大胆猜想，清晰、明确地选择简洁、合理的运算途径．

这类试题源于考生学习情境，解题思想方法源于课本，体现了“题在书外，根在书中”的命题理念，强调了知识内容和思想方法的融会贯通，突出考查逻辑思维、运算求解、直观想象、数学建模等关键能力. 试题的探索过程有利于培养学生抓住纷繁复杂之中的关键因素，善于发现事物的本质、关系和规律，返璞归真、精中求简、以简驭繁，并在一般观念指导下思考和解决问题，充分感悟到“思维是世界上最美丽的花朵”.

新高考数学试题纯净淡雅，(下转第30页)

进行教材之间的比较,甚至借助课程标准从更高的角度理解.题12—15的相关性分析也显示,课标的阅读及其基本理念、目标、内容的理解之间有着非常显著的正相关关系(r:.286** ~.636**).

这表明,对教科书的理解不仅有教师自身的因素,同时和培训活动有关联,因此教师一方面应加强自身的修养,自行阅读课标、文献资料等,另一方面多参与培训活动,与专家面对面地交流.

参考文献

[1] 杜志强.领悟课程研究[M].北京:光明日报出版社,2010:5—6
[2] 章建跃.普通高中数学课程标准教材的研究与编写[J].数学通报,2004(1):45—50
[3] 杨慧娟,裴昌根.60年来初中数学教材编写的历史沿革与启示——以人教版为例[J].数学教育学报,2011(2):15—18
[4] 曹一鸣,吴立宝.初中数学教材难易程度的国际比较研究[J].数学教育学报,2015(4):3—7
[5] 吕世虎,江鹄,李强.义务教育阶段数学新课程实施现状调查——从甘肃省教师视角的研究[J].数学教育学报,2011(5):32—36
[6] 杨启亮.教材的功能:一种超越知识观的解释[J].课程·教材·教法,2002(12):10—13
[7] 马复.认识新课程意义下的数学教材[J].数学教育学报,2005(1):49—50
[8] 严家丽,孔凡哲.国内"教师使用教科书"的研究现状及其反思[J].上海教育科研,2013(5):49
[9] 孙艳君.对教师课程理解问题的思考[J].吉林省教育学院学报,2008(1):73
[10] 杜尚荣.教师理解课程:误区与重构[J].课程教学研究,2012(3):23—24
[11] 陈柏华.教师教材观研究[M].杭州:浙江大学出版社,2012:19
[12] 刘家访.教师课程理解研究[M].福州:福建教育出版社,2014:36
[13] 俞红珍.教材选用取向与不同的教材观[J].教育理论与实践,2005(8):42—43
[14] 孙艳君.对教师课程理解问题的思考[J].吉林省教育学院学报,2008(1):73—74
[15] 孙艳君.对教师课程理解问题的思考[J].吉林省教育学院学报,2008(1):74
[16]马云鹏,刘宇.教师理解课程影响因素的研究[J].教育研究与实验,2001(4):31—33
[17] 王世伟.论教师使用教科书的原则:基于教学关系的思考[J].课程·教材·教法,2008(5):14—15
[18] 严家丽,孔凡哲.国内"教师使用教科书"的研究现状及其反思[J].上海教育科研,2013(5):49
[19] 严家丽,孔凡哲.论"课程标准—教科书—教师"关系理解的三境界[J].中国教育学刊,2014(2):41

(上接第24页)内蕴厚重,解法异彩纷呈.数学是一个有机的整体,数学学习应该重视从整体上夯实基础知识,加强知识与方法的融会贯通,注意掌握通性通法,淡化特殊技巧,在学以致用的过程中培养独立思考、质疑批判的思维能力.

"没有一种数学思想如当初刚被发现时那样发表出来.一旦问题解决了,思考的程序便颠倒过来,把火热的思考变成冷冷的美丽"(弗兰登塔尔).所以数学学习要完整地经历知识的形成与发展过程,感悟其中蕴含的数学基本思想方法,在学以致用中对自己的判断和选择要有清晰且自觉的认识,能有理有据、前后一致、逻辑连贯地阐明自己的观点,进而提高数学理性思维的能力.

数学是一种追求思维深度的艺术,守正方可出新,宁静方能致远.

参考文献

[1]教育部考试中心.中国高考评价体系[M].北京:人民教育出版社,2019,11
[2]教育部考试中心.中国高考评价体系说明[M].北京:人民教育出版社,2019,11
[3]教育部考试中心.素养导向新举措 能力考查新突破[J].中国考试,2018(7):8—12
[4]任子朝,赵轩.基于高考评价体系的数学科考试内容改革实施路径[J].中国考试,2019(12):27—31
[5]教育部考试中心.以评价体系引领内容改革,以科学情境考查关键能力[J].中国考试,2020(8):28—34
[6]李振雷,王芝平,王坤.题在书外,"根"在书中——2006年高考(北京)数学试题选析[J].高中数理化,2006(10)
[7]人民教育出版社.普通高中教科书数学必修第一册教师教学用书[M].北京:人民教育出版社,2020,6
[8]王芝平.参数范围迷人眼,充分必要常相宜[J].数学通报,2018,57(2):41—44
[9]王芝平.创新取向的数学变式教学[J].中小学教材教法,2016,21(9):7—10