# 江苏省仪征中学2020届高三（上）期中考试热身练习9

班级_________ 姓名_________ 学号_________ 评价_________

## 一、填空题：

1.设全集$U=\{1,2,3,4,5,6\}$,集合$A=\{3,4\}, B=\{2,4,5\}$，则$(C_U A)\cup B=$________.

2. 若复数$z$满足条件$(3-i)z=5$ (其中$i$为虚数单位)，则$|z|=$______.

3.已知$f(x)=2^x+\dfrac{a}{2^x}$为奇函数，$g(x)=\log_2(2^x+1)-\dfrac{1}{2}bx-1$为偶函数，则$f(ab)=$______.

4.若函数$f(x)=\sin(\omega x+\dfrac{\pi}{6})(\omega>0)$图像的两条相邻的对称轴之间的距离为$\dfrac{\pi}{2}$，且该函数图像关于点$(x_0,0)$成中心对称，$x_0\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，则$x_0=$_______.

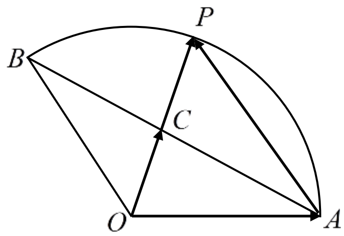
5.向量$\vec{a},\vec{b}$均为非零向量，$(\vec{a}+2\vec{b})\perp\vec{a},(\vec{b}+2\vec{a})\perp\vec{b}$，则$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为_____.

6. 抛物线$y^2=8x$的焦点到双曲线$\dfrac{x^2}{12}-\dfrac{y^2}{4}=1$的渐近线的距离为___ .

7.已知$\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2}),\cos(\alpha+\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{1}{3}$，则$\cos(2\alpha+\dfrac{\pi}{6})=$______.

8.已知定义在$(0,+\infty)$上的可导函数$f(x)$的导函数为$f'(x)$，满足$f(x)<x\cdot f'(x)$，且$f(1)=0$，则关于$x$的不等式$f(x)<0$的解集为______.

9.．如图，在扇形$AOB$中，$OA=4$，$\angle AOB=120°$，$P$为弧$AB$上的一点，$OP$与$AB$相交于点$C$，若$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=8$，则$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AP}$的值为___.



（第9题）

10. 已知直线$l$: $y=x+m$与圆$C$：$(x-1)^2+(y+2)^2=9$相交于不同的点$A$、$B$，且坐标原点$O$在以$AB$为直径的圆外，则实数$m$的取值范围_________ .

11.点 $B$ 在线段 $AC$ 上，$AB=\dfrac{1}{2}BC=1$，点 $P$ 是 $A$、$B$、$C$ 所在直线外一点，且满足$\angle CPB=90°$，$\tan\angle APB=\dfrac{4}{3}$，则$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=$_____.

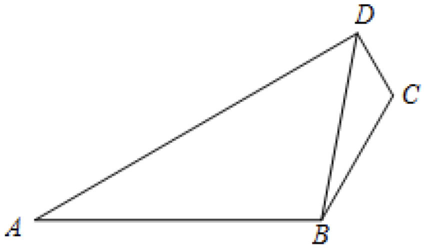
12.已知实数$x,y>0$，则$\dfrac{(2x+1)(y+1)}{2x^2+5y^2+7}$的最大值为______.

二、解答题：

1. 如图，已知 $A$、$B$、$C$、$D$ 四点共面，且 $CD=1$，$BC=2$，$AB=4$，$\angle ABC=120°$，$\cos\angle BDC=\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

(1) 求 $\sin\angle DBC$；

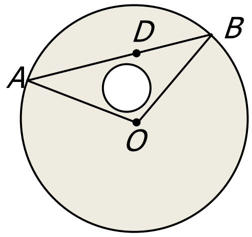
(2) 求 $AD$.




2. 有一块以点 $O$ 为圆心，半径为 2 百米的圆形草坪，草坪内距离 $O$ 点 $\sqrt{2}$ 百米的 $D$ 点有一用于灌溉的水笼头，现准备过点 $D$ 修一条笔直小路交草坪圆周于 $A$，$B$ 两点，为了方便居民散步，同时修建小路 $OA$，$OB$，其中小路的宽度忽略不计．

(1)若要使修建的小路的费用最省，试求小路的最短长度；

(2)若要在△$ABO$ 区域内(含边界)规划出一块圆形的场地用于老年人跳广场舞，试求这块圆形广场的最大面积．(结果保留根号和π)

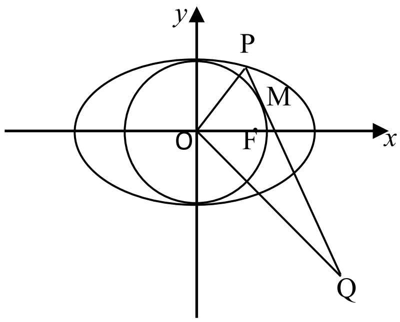


3.在平面直角坐标系 $xoy$ 中，椭圆 C ： $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$ ，右焦点 F（1,0），点 P 在椭圆 C 上，且在第一象限内，直线 PQ 与圆 O： $x^2+y^2=b^2$ 相切于点 M.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）求|PM|·|PF|的取值范围；

（3）若 OP⊥OQ，求点 Q 的纵坐标 $t$ 的值.




三、附加题：

1.已知矩阵 $M=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}$

（ 1 ）求矩阵 M 的逆矩阵；

（ 2 ）求矩阵 M 的特征值及特征向量；

2. 某高校设计了一个实验学科的实验考查方案：考生从 6 道备选题中一次性随机抽取 3 题，按照题目要求独立完成全部实验操作。规定：至少正确完成其中 2 题的便可提交通过。已知 6 道备选题中考生甲有 4 道题能正确完成，2 道题不能完成。

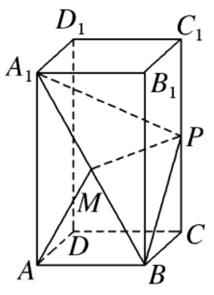
（1）求出甲考生正确完成题数的概率分布列，并计算数学期望；

（2）若考生乙每题正确完成的概率都是 $\frac{2}{3}$ ，且每题正确完成与否互不影响。试从至少正确完成 2 题的概率分析比较两位考生的实验操作能力．

3. 如图，正四棱柱 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AD=1$，$D_1D=2$，点 $P$ 为棱 $CC_1$ 的中点．

(1)设二面角 $A\text{-}A_1B\text{-}P$ 的大小为 $\theta$，求 $\sin\theta$ 的值；

(2)设 $M$ 为线段 $A_1B$ 上的一点，求$\dfrac{AM}{MP}$的取值范围．



# 江苏省仪征中学 2020 届高三（上）期中考试热身练习 9

班级________ 姓名________ 学号________ 评价________

一、填空题：

1.设全集$U=\{1,2,3,4,5,6\}$,集合$A=\{3,4\}, B=\{2,4,5\}$，则$(C_U A)\cup B=$________.

答案：{1,2,4,5,6}

解析：因为$U=\{1,2,3,4,5,6\}$， $A=\{3,4\}$，所有$C_U A=\{1,2,5,6\}$，又因为$B=\{2,4,5\}$，故$(C_U A)\cup B=\{1,2,4,5,6\}$

3. 若复数$z$满足条件$(3-i)z=5$ (其中$i$为虚数单位)，则$|z|=$______.

答案：$\frac{\sqrt{10}}{2}$

解析：因为$(3-i)z=5$，所以$z=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$，所以$|z|=\sqrt{(\frac{3}{2})^2+(\frac{1}{2})^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

3.已知$f(x)=2^x+\frac{a}{2^x}$为奇函数，$g(x)=\log_2(2^x+1)-\frac{1}{2}bx-1$为偶函数，则$f(ab)=$______.

答案：-$\frac{3}{2}$

解析：由$f(x)$为奇函数，求出$a=-1$, $g(x)$为偶函数，求出$b=1$，所以$f(ab)=f(-1)=-\frac{3}{2}$

4.若函数$f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})(\omega>0)$图像的两条相邻的对称轴之间的距离为$\frac{\pi}{2}$，且该函数图像关于点$(x_0,0)$成中心对称，$x_0\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，则$x_0=$______.

答案：$\frac{5\pi}{12}$

**[解析]** 依题意，$T=\pi$，所以$\omega=2$，所以$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，令$2x+\frac{\pi}{6}=k\pi$，解得$x=-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，因为$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$的图像关于点$(x_0,0)$成中心对称，$x_0\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以$x_0=\frac{5\pi}{12}$

5.向量$\vec{a},\vec{b}$均为非零向量，$(\vec{a}+2\vec{b})\perp\vec{a},(\vec{b}+2\vec{a})\perp\vec{b}$，则$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为_____.

答案：$\frac{2\pi}{3}$

解析：∵（a+2b）⊥a，（b+2a）⊥b，

∴（a+2b）•a=0，（b+2a）•b=0，

即$a\cdot b=-\frac{1}{2}a^2=-\frac{1}{2}b^2$，

$\therefore\cos\theta=\frac{a\cdot b}{|a|\cdot|b|}=-\frac{1}{2}$

$\therefore\theta=\frac{2\pi}{3}$

6. 抛物线$y^2=8x$的焦点到双曲线$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$的渐近线的距离为___ .

答案：1

7.已知$\alpha\in(0,\frac{\pi}{2}),\cos(\alpha+\frac{\pi}{3})=\frac{1}{3}$，则$\cos(2\alpha+\frac{\pi}{6})=$______.

答案：$\frac{4\sqrt{2}}{9}$

解析：令$\alpha+\frac{\pi}{3}=t$，则$\alpha=t-\frac{\pi}{3}$，所以$\cos t=\frac{1}{3},2\alpha+\frac{\pi}{6}=2t-\frac{\pi}{2}$

所以$\cos(2\alpha+\frac{\pi}{6})=\cos(2t-\frac{\pi}{2})=\sin 2t$，因为$\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，所以$t\in(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6})$

所以$\sin t>0$,即$\sin t=\sqrt{1-(\frac{1}{3})^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，所以$\cos(2\alpha+\frac{\pi}{6})=2\times\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4\sqrt{2}}{9}$.

8.已知定义在$(0,+\infty)$上的可导函数$f(x)$的导函数为$f'(x)$，满足$f(x)<x\cdot f'(x)$，且$f(1)=0$，则关于$x$的不等式$f(x)<0$的解集为______.

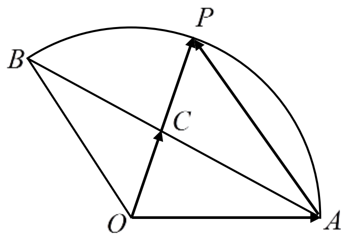
答案：$(0,1)$

解析：构造$F(x)=\frac{f(x)}{x}(x>0)$，$F'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$，因为$f(x)<x\cdot f'(x)$，所以$F'(x)>0$

所以$F(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，因为$f(1)=0$，所以$F(1)=0$，因为$x>0$，$F(x)<0$，即$f(x)<0$

求得$x\in(0,1)$

9.．如图，在扇形$AOB$中，$OA=4$，$\angle AOB=120°$，$P$为弧$AB$上的一点，$OP$与$AB$相交于点$C$，若$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=8$，则$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AP}$的值为____.



（第 9 题）

答案：4

10. 已知直线$l$：$y=x+m$与圆$C$：$(x-1)^2+(y+2)^2=9$相交于不同的点$A$、$B$，且坐标原点$O$在以$AB$为直径的圆外，则实数$m$的取值范围__▲__.

答案：$\left(-3\sqrt{2}-3,-4\right)\cup\left(1,3\sqrt{2}-3\right)$

11.点$B$在线段$AC$上，$AB=\frac{1}{2}BC=1$，点$P$是$A$、$B$、$C$所在直线外一点，且满足$\angle CPB=90°$，$\tan\angle APB=\frac{4}{3}$，则$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=$_____.

答案：$-\frac{32}{17}$

解析：设$\angle PBC=\theta$，$\because\tan\angle APB=\frac{4}{3},\therefore\cos\angle APB=\frac{3}{5},\sin\angle APB=\frac{4}{5}$，则由$AB=\frac{1}{2}BC=1$可得

$\left|\overrightarrow{PC}\right|=2sin\theta,\left|\overrightarrow{PB}\right|=2cos\theta,\left|\overrightarrow{PA}\right|=sin(\pi-\theta)\frac{1}{\sin\angle APB}=\frac{5}{4}sin\theta,$

且$\left|\overrightarrow{PA}\right|^2=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{PB}\right|^2-2\left|\overrightarrow{PB}\right|\left|\overrightarrow{AB}\right|cos(\pi-\theta)=1+4cos^2\theta+4cos^2\theta=1+8cos^2\theta,$

$\therefore\frac{25}{16}\sin^2\theta=1+8cos^2\theta,$ 解得$\sin^2\theta=\frac{16}{17}$

则$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=\left|\overrightarrow{PA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{PC}\right|\cdot\cos\angle APC=\frac{5}{4}\sin\theta\cdot2\sin\theta\cos(90°+\angle APB)$

$=\frac{5}{2}\sin^2\theta(-\sin\angle APB)=-\frac{32}{17}$

12.已知实数$x,y>0$，则$\frac{(2x+1)(y+1)}{2x^2+5y^2+7}$的最大值为______.

答案：$\frac{1}{2}$

解析：$\frac{(2x+1)(y+1)}{2x^2+5y^2+7}=\frac{2xy+2x+y+1}{(x^2+4y^2)+(x^2+4)+(y^2+1)+2}\le\frac{2xy+2x+y+1}{4xy+4x+2y+2}=\frac{1}{2}$

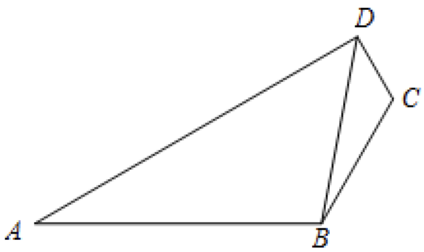
(当且仅当“$x=2, y=1$”时取“=”)

二、解答题：

1.如图，已知 $A$、$B$、$C$、$D$ 四点共面，且 $CD$=1，$BC$=2，$AB$=4，$\angle ABC=120°$，$\cos\angle BDC=\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

(3) 求 $\sin\angle DBC$；

(4) 求 $AD$.




16.【解析】(1) $\cos\angle BDC=\frac{DC^2+BD^2-BC^2}{2\cdot DC\cdot DB}$，

$\therefore BD=\sqrt{7}$ 或 $-\frac{3}{7}\sqrt{7}$（舍），

$\sin\angle BDC=\frac{\sqrt{21}}{7}$，$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times\sqrt{7}\times1\times\frac{\sqrt{21}}{7}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{DC}{\sin\angle DBC}=\frac{BC}{\sin\angle CDB}$，$\frac{1}{\sin\angle DBC}=\frac{2}{\frac{\sqrt{21}}{7}}$，

$\therefore \sin\angle DBC=\frac{\sqrt{21}}{14}$.

(2) $\cos\angle DBC=\frac{5}{14}\sqrt{7}$，

$\cos\angle ABD=\cos120°\cdot\cos\angle DBC+\sin120°\cdot\sin\angle DB$

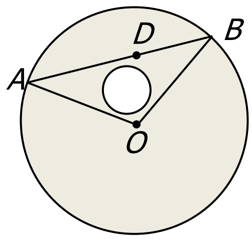
$\because AD^2=AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cdot\cos\angle ABD=27$，

$\therefore AD=3\sqrt{3}$.

2. 有一块以点 $O$ 为圆心，半径为 2 百米的圆形草坪，草坪内距离 $O$ 点 $\sqrt{2}$ 百米的 $D$ 点有一用于灌溉的水笼头，现准备过点 $D$ 修一条笔直小路交草坪圆周于 $A$，$B$ 两点，为了方便居民散步，同时修建小路 $OA$，$OB$，其中小路的宽度忽略不计．

(1)若要使修建的小路的费用最省，试求小路的最短长度；

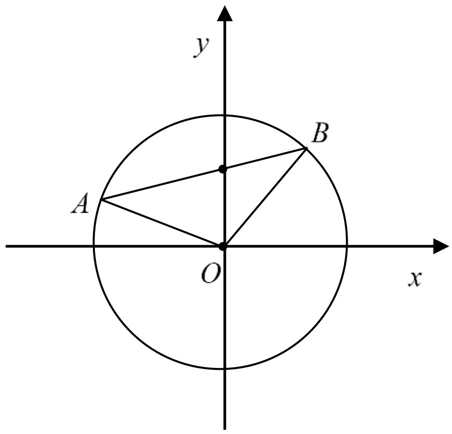
(2)若要在△$ABO$ 区域内(含边界)规划出一块圆形的场地用于老年人跳广场舞，试求这块圆形广场的最大面积．(结果保留根号和π)




解：建立如图所示的平面直角坐标系，则 $D(0,\sqrt{2})$

(1)小路的长度为 $OA+OB+AB$，因为 $OA,OB$

长为定值，故只需要 $AB$ 最小即可．




作 $OM\perp AB$ 于 $M$，记 $OM=d$，则

$AB=2\sqrt{OA^2-OM^2}=2\sqrt{4-d^2}$，

又 $d\leqslant OD=\sqrt{2}$，故 $AB\geqslant 2\sqrt{4-2}=2\sqrt{2}$，

此时点 $D$ 为 $AB$ 中点．

故小路的最短长度为 $4+2\sqrt{2}$ (百米)．……………4 分

(2)显然，当广场所在的圆与△$ABC$ 内切时，

面积最大，设△$ABC$ 的内切圆的半径为 $r$，

则△ $ABC$ 的面积为 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}(AB+AC+BC)\cdot r=\frac{1}{2}AB\cdot d$ ，……6 分

由弦长公式 $AB=2\sqrt{4-d^2}$ 可得 $d^2=4-\frac{AB^2}{4}$ ，所以 $r^2=\frac{AB^2\cdot(16-AB^2)}{4(AB+4)^2}$ ，………8 分

设 $AB=x$ ，则 $r^2=f(x)=\frac{x^2\cdot(16-x^2)}{4(x+4)^2}=\frac{x^2\cdot(4-x)}{4(x+4)}$ ，

所以 $f'(x)=\frac{-2x^3-8x^2+32x}{4(x+4)^2}=\frac{-2x\cdot(x^2+4x-16)}{4(x+4)^2}$ ， …………………10 分

又因为 $0<d\leqslant CD$ ，即 $0<d\leqslant\sqrt{2}$ ，所以 $x=AB=2\sqrt{4-d^2}\in\left[2\sqrt{2},4\right)$ ，………12 分

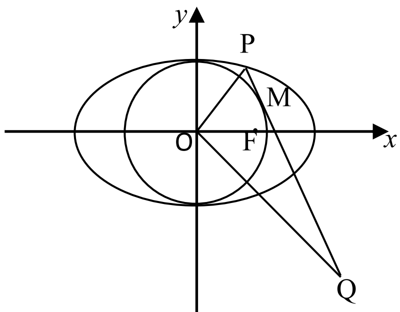
所以 $f'(x)=\frac{-2x\cdot(x^2+4x-16)}{4(x+4)^2}<0$ ，所以 $f(x)_{\max}=f(2\sqrt{2})=6-4\sqrt{2}$ ，

即△ $ABC$ 的内切圆的面积最大值为 $(6-4\sqrt{2})\pi$ ．………………………………………14 分

3.在平面直角坐标系 $xoy$ 中，椭圆 C ：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$ ，右焦点 F（1,0），点 P 在椭圆 C 上，且在第一象限内，直线 PQ 与圆 O：$x^2+y^2=b^2$ 相切于点 M.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）求|PM|·|PF|的取值范围；



（3）若 OP⊥OQ，求点 Q 的纵坐标 $t$ 的值.

解：（1）$\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}\\ c=1\end{cases}$…………2 分

∴$c$=1，$a$=2，∴$b=\sqrt{3}$，∴椭圆方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$…………4 分

（2）设 $P(x_0,y_0)$，则$\dfrac{x_0^{\ 2}}{4}+\dfrac{y_0^{\ 2}}{3}=1(0<x_0<2)$

PM=$\sqrt{x_0^{\ 2}+y_0^{\ 2}-3}=\sqrt{x_0^{\ 2}+3-\dfrac{3}{4}x_0^{\ 2}-3}=\dfrac{1}{2}x_0$，  ………………6 分

PF=$2-\dfrac{1}{2}x_0$…………8 分  ∴PM・PF=$\dfrac{1}{4}x_0(4-x_0)=-\dfrac{1}{4}(x_0-2)^2+1$，

∵ $0<x_0<2$，∴|PM|・|PF|的取值范围是（0,1）.…………9 分

（3）法一：①当 PM⊥$x$ 轴时，P$(\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，Q$(\sqrt{3},t)$或$(-\sqrt{3},t)$，

由$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$解得$t=\pm2\sqrt{3}$……………………10 分

② 当 PM 不垂直于 $x$ 轴时，设 $P(x_0,y_0)$，PQ 方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$，即 $kx-y-kx_0+y_0=0$

∵PQ 与圆 O 相切，∴$\dfrac{|kx_0-y_0|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{3}$，∴$(kx_0-y_0)^2=3k^2+3$

∴ $2kx_0y_0=k^2x_0^{\ 2}+y_0^{\ 2}-3k^2-3$………………12 分

又$Q(\dfrac{t-y_0+kx_0}{k},t)$，所以由$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$得$t=\dfrac{x_0(y_0-kx_0)}{x_0+ky_0}$……12 分

$$\therefore t^2=\frac{x_0^{\ 2}(y_0-kx_0)^2}{(x_0+ky_0)^2}=\frac{x_0^{\ 2}(kx_0-y_0)^2}{x_0^{\ 2}+k^2y_0^{\ 2}+2kx_0y_0}=$$

$$\frac{x_0^{\ 2}(3k^2+3)}{x_0^{\ 2}+k^2y_0^{\ 2}+k^2x_0^{\ 2}+y_0^{\ 2}-3k^2-3}=\frac{x_0^{\ 2}(3k^2+3)}{(1+k^2)x_0^{\ 2}+(1+k^2)(3-\frac{3}{4}x_0^{\ 2})-3k^2-3}=12,$$

$\therefore t=\pm2\sqrt{3}$ ……14 分

法二：设 $P(x_0,y_0)$，则直线 OQ：$y=-\dfrac{x_0}{y_0}x$，$\therefore Q(-\dfrac{y_0}{x_0}t,t)$，

$\because$ OP⊥OQ，$\therefore$ OP·OQ=OM·PQ

$\therefore \sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2}\cdot\sqrt{\dfrac{{y_0}^2}{{x_0}^2}t^2+t^2}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{(x_0+\dfrac{y_0}{x_0}t)^2+(y_0-t)^2}$ ………10 分

$\therefore \sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2}\cdot\sqrt{\dfrac{t^2}{{x_0}^2}({x_0}^2+{y_0}^2)}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{{x_0}^2+\dfrac{{y_0}^2}{{x_0}^2}t^2+{y_0}^2+t^2}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{\dfrac{{x_0}^2+{y_0}^2}{{x_0}^2}({x_0}^2+t^2)}$

$\therefore ({x_0}^2+{y_0}^2)t^2=3({x_0}^2+t^2)$，$\therefore t^2=\dfrac{3{x_0}^2}{{x_0}^2+{y_0}^2-3}$ ………………12 分

$\because \dfrac{{x_0}^2}{4}+\dfrac{{y_0}^2}{3}=1$，$\therefore {y_0}^2=3-\dfrac{3{x_0}^2}{4}$，$\therefore t^2=\dfrac{3{x_0}^2}{\frac{1}{4}{x_0}^2}=12$，$\therefore t=\pm2\sqrt{3}$ ……………14 分

三、附加题：

1.已知矩阵 $M=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}$

（3）求矩阵 M 的逆矩阵；

（4）求矩阵 M 的特征值及特征向量；

(1) $M^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{4}{5} & -\frac{1}{5}\\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5}\end{bmatrix}$．……………………………………………………………………4 分

(2) 矩阵 A 的特征多项式为 $f(x)=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1\\ -3 & \lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-4)-3=\lambda^2-6\lambda+5$，

令 $f(\lambda)=0$，得矩阵 $M$ 的特征值为 $1$ 或 $5$，…………………………………………6 分

当 $\lambda=1$ 时 由二元一次方程 $\begin{cases}-x-y=0,\\ -3x-3y=0,\end{cases}$ 得 $x+y=0$，令 $x=1$，则 $y=-1$，

所以特征值$\lambda=1$对应的特征向量为$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$．........................................8 分

当$\lambda=5$时 由二元一次方程$\begin{cases}3x-y=0,\\-3x+y=0,\end{cases}$得$3x-y=0$，令$x=1$，则$y=3$，

所以特征值$\lambda=5$对应的特征向量为$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$．........................................10 分

2. 某高校设计了一个实验学科的实验考查方案：考生从 6 道备选题中一次性随机抽取 3 题，按照题目要求独立完成全部实验操作。规定：至少正确完成其中 2 题的便可提交通过。已知 6 道备选题中考生甲有 4 道题能正确完成，2 道题不能完成。

（1）求出甲考生正确完成题数的概率分布列，并计算数学期望；

（2）若考生乙每题正确完成的概率都是$\frac{2}{3}$，且每题正确完成与否互不影响。试从至少正确完成 2 题的概率分析比较两位考生的实验操作能力．

解：（Ⅰ）设考生甲正确完成实验操作的题数分别为 $X$，

则$X\sim H(3,4,6)$，所以$P(X=k)=\frac{C_4^kC_2^{3-k}}{C_6^3}$，$k=1,2,3$........................2 分

所以考生甲正确完成实验操作的题数的概率分布列为：

| $X$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{1}{5}$ |

$E(X)=1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{3}{5}+3\times\frac{1}{5}=2$；............................................................4 分

（Ⅱ）设考生乙正确完成实验操作的题数为 $Y$，则

$Y\sim B(3,\dfrac{2}{3})$，所以 $P(Y=k)=C_3^k(\dfrac{2}{3})^k(\dfrac{1}{3})^{3-k}$ ，$k=0,1,2,3$ ........................6 分

$$P(Y\geq 2)=\frac{12}{27}+\frac{8}{27}=\frac{20}{27}$$

又 $P(X\geq 2)=\dfrac{3}{5}+\dfrac{1}{5}=\dfrac{4}{5}$, 且 $P(X\geq 2)>P(Y\geq 2)$ ，....................................8 分

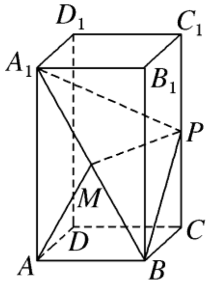
从至少正确完成 2 题的概率考察，甲通过的可能性大，

因此可以判断甲的实验操作能力较强。......................................................10 分

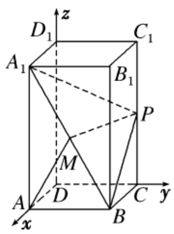
3．如图，正四棱柱 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，$AD=1$，$D_1D=2$，点 $P$ 为棱 $CC_1$ 的中点．

(1)设二面角 $A$-$A_1B$-$P$ 的大小为 $\theta$，求 $\sin\theta$ 的值；

(2)设 $M$ 为线段 $A_1B$ 上的一点，求 $\dfrac{AM}{MP}$的取值范围．




**解：**(1)如图，以点 $D$ 为原点，$DA$，$DC$，$DD_1$ 所在直线分别为 $x$ 轴，$y$ 轴，$z$ 轴，建立空间直角坐标系 $D$-$xyz$，




则 $A(1,0,0)$，$A_1(1,0,2)$，$P(0,1,1)$，$B(1，1,0)$，

所以 $\overrightarrow{PA_1}=(1，-1,1)$，$\overrightarrow{PB}=(1,0，-1)$，

设平面 $PA_1B$ 的法向量为 $\mathrm{m}=(x，y，z)$，

则 $\begin{cases}\mathrm{m}\cdot\overrightarrow{PA_1}=0,\\ \mathrm{m}\cdot\overrightarrow{PB}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x-y+z=0,\\ x-z=0,\end{cases}$

令 $x=1$，得 $\mathrm{m}=(1,2,1)$．

又平面 $AA_1B$ 的一个法向量 $\mathrm{n}=\overrightarrow{DA}=(1,0,0)$，

所以 $\cos\langle \mathrm{n},\ \mathrm{m}\rangle=\dfrac{\mathrm{n}\cdot\mathrm{m}}{|\mathrm{n}|\cdot|\mathrm{m}|}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$,

则 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{30}}{6}$.

(2)设 $M(x,\ y,\ z)$，因为 $M$ 在 $A_1B$ 上，

所以 $\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{BA_1}$，即 $(x-1,\ y-1,\ z)=\lambda(0,\ -1,2)(0\leqslant\lambda\leqslant1)$，

所以 $M(1,1-\lambda,\ 2\lambda)$，

所以 $\overrightarrow{MA}=(0,\ \lambda-1,\ -2\lambda)$，$\overrightarrow{MP}=(-1,\ \lambda,\ 1-2\lambda)$，

所以 $\dfrac{AM}{MP}=\sqrt{\dfrac{(\lambda-1)^2+4\lambda^2}{1+\lambda^2+(1-2\lambda)^2}}=\sqrt{\dfrac{5\lambda^2-2\lambda+1}{5\lambda^2-4\lambda+2}}=\sqrt{1+\dfrac{2\lambda-1}{5\lambda^2-4\lambda+2}}$,

令 $2\lambda-1=t\in[-1,1]$，则 $\dfrac{2\lambda-1}{5\lambda^2-4\lambda+2}=\dfrac{4t}{5t^2+2t+5}$,

当 $t\in[-1,0)$ 时，$\dfrac{4t}{5t^2+2t+5}=\dfrac{4}{5t+\frac{5}{t}+2}\in\left[-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$,

当 $t\in(0,1]$ 时，$\dfrac{4t}{5t^2+2t+5}=\dfrac{4}{5t+\frac{5}{t}+2}\in\left(0,\ \dfrac{1}{3}\right]$,

当 $t=0$ 时，$\dfrac{4t}{5t^2+2t+5}=0$，所以 $\dfrac{4t}{5t^2+2t+5}\in\left[-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3}\right]$,

则 $\dfrac{AM}{MP}\in\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right]$.