

江苏省仪征中学 2019 届高三年级第一学期 12 月月考

数学 II (理科附加题)

注意事项:

1. 附加题供选修物理的考生使用.
2. 本试卷共 40 分, 考试时间 30 分钟.
3. 答题前, 请务必将自己的姓名、学校写在答题卡上. 试题的答案写在答题卡上对应题目的答案空格内. 考试结束后, 交回答题卡.

21. 【选做题】本题 A、B、C 三小题, 请选定其中两小题, 并在相应的答题区域内作答. 若多做, 则按作答的前两小题评分. 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

A. [选修 4—2: 矩阵与变换](本小题满分 10 分)

已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & -1 \\ b & 1 \end{bmatrix}$, 其中 $a, b \in R$, 若点 $P(1,1)$ 在矩阵 A 的变换下得到的点 $P_1(1,4)$

- (1) 求实数 a, b 的值;
- (2) 求矩阵 A 的逆矩阵.

B. [选修 4—4: 坐标系与参数方程](本小题满分 10 分)

在直角坐标系 xOy 中, 已知直线 l 的参数方程是 $\begin{cases} y = 2t + 1 \\ x = t \end{cases}$ (t 是参数), 若以 O 为极

点, x 轴的正半轴为极轴, 取与直角坐标系中相同的单位长度, 建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 2\sqrt{2}(\sin\theta + \frac{\pi}{4})$. 求直线 l 被曲线 C 截得的弦长.

【必做题】第 22 题、第 23 题，每题 10 分，共计 20 分。请在答题卡指定区域内作答。解

答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

22. (本小题满分 10 分)

将 4 名大学生随机安排到 A,B,C,D 四个公司实习。

- (1) 求 4 名大学生恰好在四个不同公司的概率；
- (2) 随机变量 X 表示分到 B 公司的学生的人数，求 X 的分布列和数学期望 $E(X)$ 。

23. (本小题满分 10 分)

设 $n \in \mathbb{N}^*$ 且 $n \geq 4$ ，集合 $M = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ 的所有 3 个元素的子集记为 $A_1, A_2, \dots, A_{C_n^3}$ 。

- (1) 当 $n = 4$ 时，求集合 $A_1, A_2, \dots, A_{C_n^3}$ 中所有元素之和 S ；

- (2) 记 m_i 为 A_i ($i = 1, 2, \dots, C_n^3$) 中最小元素与最大元素之和，求 $\frac{\sum_{i=1}^{C_n^3} m_i}{C_n^3}$ 的值。

数学附加题参考答案

21. 【选做题】本题 A、B 两小题，请在相应的答题区域内作答。

A. 解：(1) 因为 $\begin{bmatrix} a & -1 \\ b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$,2 分

所以 $\begin{cases} a-1=1 \\ b+1=4 \end{cases}$ 所以 $\begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}$ 4 分

(2) $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5$,6 分

$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{-1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$ 10 分

B. 解：消去参数 t ，得直线 l 的普通方程为 $y = 2x + 1$ ，2 分

$\rho = 2\sqrt{2}(\sin\theta + \frac{\pi}{4})$ 即 $\rho = 2(\sin\theta + \cos\theta)$ ，两边同乘以 ρ 得 $\rho^2 = 2(\rho\sin\theta + \rho\cos\theta)$ ，

所以 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ ，4 分

圆心 C 到直线 l 的距离 $d = \frac{|2-1+1|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ，6 分

所以弦长为 $AB = 2\sqrt{2 - (\frac{2\sqrt{5}}{5})^2} = \frac{2\sqrt{30}}{5}$ 10 分

22. 解：(1) 将 4 人安排四个公司中，共有 $4^4=256$ 种不同放法。

记“4 个人恰好在四个不同的公司”为事件 A ，

事件 A 共包含 $A_4^4 = 24$ 个基本事件，

所以 $P(A) = \frac{24}{256} = \frac{3}{32}$ ，

所以 4 名大学生恰好在四个不同公司的概率 $\frac{3}{32}$ 3 分

(2) 方法 1: X 的可能取值为 0, 1, 2, 3, 4,

$P(X=0) = \frac{3^4}{4^4} = \frac{81}{256}$, $P(X=1) = \frac{C_4^1 \times 3^3}{4^4} = \frac{27}{64}$, $P(X=2) = \frac{C_4^2 \times 3^2}{4^4} = \frac{27}{128}$,

$P(X=3) = \frac{C_4^3 \times 3}{4^4} = \frac{3}{64}$, $P(X=4) = \frac{C_4^4}{4^4} = \frac{1}{256}$.

所以 X 的分布列为:

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{81}{256}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{128}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{1}{256}$

..... 8分

所以 X 的数学期望为:

$$E(X) = 0 \times \frac{81}{256} + 1 \times \frac{27}{64} + 2 \times \frac{27}{128} + 3 \times \frac{3}{64} + 4 \times \frac{1}{256} = 1. \quad \dots\dots\dots 10 \text{分}$$

方法 2: 每个同学分到 B 公司的概率为 $P(B) = \frac{1}{4}$, $P(\bar{B}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ 5分

根据题意 $X \sim B\left(4, \frac{1}{4}\right)$, 所以 $P(X=k) = C_4^k \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{4-k}$, $k=0, 1, 2, 3, 4$,

所以 X 的分布列为:

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{81}{256}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{128}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{1}{256}$

..... 8分

所以 X 的数学期望为 $E(X) = 4 \times \frac{1}{4} = 1$ 10分

23. (1) 因为含元素1的子集有 C_3^2 个, 同理含 2,3,4 的子集也各有 C_3^2 个, 于是所求元素之和为 $(1+2+3+4) \times C_3^2 = 30$; 3分

(2) 集合 $M = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ 的所有 3 个元素的子集中:

以 1 为最小元素的子集有 C_{n-1}^2 个, 以 n 为最大元素的子集有 C_{n-1}^2 个;

以 2 为最小元素的子集有 C_{n-2}^2 个, 以 $n-1$ 为最大元素的子集有 C_{n-2}^2 个;

.....

以 $n-2$ 为最小元素的子集有 C_2^2 个, 以 3 为最大元素的子集有 C_2^2 个. 5分

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{i=1}^{C_n^3} m_i &= m_1 + m_2 + \dots + m_{C_n^3} \\ &= (n+1)(C_{n-1}^2 + C_{n-2}^2 + \dots + C_2^2) \\ &= (n+1)(C_{n-1}^2 + C_{n-2}^2 + \dots + C_3^2 + C_3^3) \\ &= (n+1)(C_{n-1}^2 + C_{n-2}^2 + \dots + C_4^2 + C_4^3) \\ &= \dots = (n+1)C_n^3, \quad \dots\dots\dots 8 \text{分} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\sum_{i=1}^{C_n^3} m_i}{C_n^3} = n+1. \quad \therefore \frac{\sum_{i=1}^{C_{2018}^3} m_i}{C_{2018}^3} = 2018+1 = 2019. \quad \dots\dots\dots 10 \text{分}$$