盐城市2021届高三年级第一学期期中考试

数学试题

一、单选题：本大题共8小题，每小题5分，共40分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.命题“$\forall x\in(0,1),x^2-x<0$”的否定是(　　)

A. $\exists x\notin(0,1),x^2-x\geqslant0$　　B. $\exists x\in(0,1),x^2-x\geqslant0$

C. $\forall x\notin(0,1),x^2-x<0$　　D. $\forall x\in(0,1),x^2-x\geqslant0$

【答案】B.

2.已知集合$A=\{x|y=\ln(x-1)\}$，集合$B=\left\{y|y=\left(\frac{1}{2}\right)^x,x>-2\right\}$，则$A\cap B=$(　　)

A. $\varnothing$　　B. $[1,4)$　　C. $(1,4)$　　D. $(4,+\infty)$

【答案】C.

$A=(1,+\infty),B=(0,4)A\cap B=(1,4)$

3.已知向量$\vec{a},\vec{b}$满足$|\vec{a}|=|\vec{b}|$，且$\vec{a},\vec{b}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$，则$\vec{b}$与$\vec{a}-\vec{b}$的夹角为(　　)

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{\pi}{2}$　　C. $\frac{3\pi}{4}$　　D. $\frac{2\pi}{3}$

【答案】D.

4. 在《九章算术》中有一个古典名题“两鼠穿墙"问题:今有垣厚若干尺，两鼠对穿,大鼠日一尺，小鼠也日一尺，大鼠日自倍,小鼠日自半,大意是有两只老鼠从墙的两选分别打洞穿墙,大老鼠第一天进一尺，以后每天加倍;小老鼠第一天也进一尺,以后每天减半,若垣厚33尺,则两鼠几日可相逢(　　)

A.5　　B.6　　C.7　　D.8

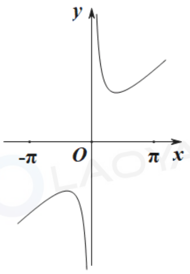
【答案】B.

$a_n=2^{n-1},S_n=2^n-1$

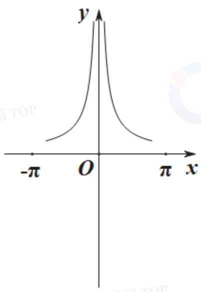
$b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},T_n=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$P_n=S_n+T_n=2^n-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+1P_5=33-\frac{1}{16}<33,P_6=65-\frac{1}{32}>33$

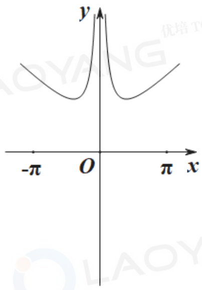
5.函数$f(x)=\frac{x}{x-\sin x}(x\in[-\pi,\pi])$的图像大致是(　　)



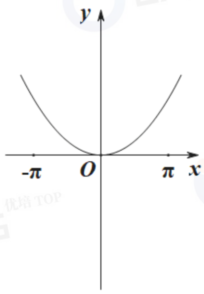
A



B



C



D

【答案】B.

$$f(-x)=\frac{-x}{-x-\sin(-x)}=\frac{x}{x-\sin x}=f(x)$$

$$\frac{x}{x-\sin x}=1+\frac{\sin x}{x-\sin x}\ x\to+\infty,1+\frac{\sin x}{x-\sin x}\to 1$$

6.要测定古物的年代，可以用发射性碳法：在动植物的体内都含有微量的发射性 ^{14}C，动植物死亡后，停止新陈代谢，^{14}C 不再产生，且原有的 ^{14}C 会自动衰变.经科学测定，^{14}C 的半衰期为 5730 年(设 ^{14}C 的原始量为 1，经过 x 年后，^{14}C 的含量 $f(x)=a^x$ 即 $f(5730)=\frac{1}{2}$)，现有一古物，测得其 ^{14}C 的原始量的 79.37%，则该古物距今约多少年？(　　)(参考数据：$\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\approx 0.7937$，$\sqrt[5730]{\frac{1}{2}}\approx 0.9998$)

A.1910　　B.3581　　C.9168　　D.17190

【答案】A.

$$a^{5730}=\frac{1}{2},\ (a^{5730})^{\frac{1}{3}}=0.7937$$

$$a^x=0.7937\Rightarrow x=1910$$

7.已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1,a_2=4,a_3=10$，且 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 是等比数列，则 $\sum_{i=1}^{8}a_i$ (　　)

A.376　　B.382　　C.749　　D.766

【答案】C.

$$a_3-a_2=2(a_2-a_1),\ a_{n+1}-a_n=3\cdot 2^{n-1}$$

$$a_n=3\cdot 2^{n-1}-2$$

$$S_n=3\cdot 2^n-3-2n,\ S_8=749$$

8.设 $x,y\in(0,\pi)$，若 $\sin(\sin x)=\cos(\cos y)$，则 $\cos(\sin x)$ 与 $\sin(\cos y)$ 的大小关系为(　　)

A.=　　B.>　　C.<　　D.以上均不对

【答案】D.

由题意知 $0<\sin x\leqslant 1$，$-1<\cos y<1$，$1\text{rad}\approx 57^\circ$，因为 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\alpha$，$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$，所以 $\sin x-\frac{\pi}{2}=\cos y$ 或 $\sin x+\cos y=\frac{\pi}{2}$，$\cos(\sin x)=\cos(\cos y+\frac{\pi}{2})=-\sin(\cos y)$ 或 $\cos(\sin x)=\cos(\frac{\pi}{2}-\cos y)=\sin(\cos y)$

特值法：

令 $\sin x=\cos y=\frac{\pi}{4}$，则 $\cos(\sin x)=\sin(\cos y)$

令 $\cos y=-\frac{1}{2}$，$\sin x=\frac{\pi-1}{2}$，$\cos(\sin x)=\cos\frac{\pi-1}{2}=\sin\frac{1}{2}>\sin(\cos y)=\sin(-\frac{1}{2})$

二、多选题：本题共4小题，每小题5分，共20分，在每小题给出的选项中，有多项符合要求，全部选对的得5分，部分选对的得3分，有选错的得0分)

9.设函数 $f(x)=5^{|x|}$，$g(x)=ax^2-x(a\in R)$，若 $f[g(1)]=5$，则 $a=$(　　)

A.1　　B.2　　C.3　　D.0

【答案】BD.

$f[g(1)]=5^{|a-1|}=5\Rightarrow a-1=\pm1\Rightarrow a=2,0$

10.函数 $f(x)=\frac{1}{2}ax^2-(a+2)x+2\ln x$ 单调递增的必要不充分条件有(　　)

A. $a\geqslant 2$　　B. $a=2$　　C. $a\geqslant 1$　　D. $a>2$

【答案】AC.

$f'(x)=ax-(a+2)+\frac{2}{x}=\frac{(ax-2)(x-1)}{x}\Rightarrow a=2$

11.在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，若 $a^2=b^2+bc$，则角 A 可为(　　)

A. $\frac{3\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{7\pi}{12}$　　D. $\frac{2\pi}{3}$

【答案】BC.

$a^2=b^2+bc=b^2+c^2-2bc\cos A\Rightarrow\cos A=\frac{c}{2b}-\frac{1}{2}>-\frac{1}{2}\Rightarrow A<\frac{2\pi}{3}$

12.设数列 $\{x_n\}$，若存在常数 a，对任意正数 r，总存在正整数 N，当 $n\geqslant N$，有 $|x_n-a|<r$，则数列 $\{x_n\}$ 为收敛数列.下列关于收敛数列正确的有(　　)

A.等差数列不可能是收敛数列

B.若等比数列 $\{x_n\}$ 是收敛数列，则公比 $q\in(-1,1]$

C.若数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_n=\sin(\frac{\pi}{2}n)\cos(\frac{\pi}{2}n)$，则 $\{x_n\}$ 是收敛数列

D.设公差不为0的等差数列 $\{x_n\}$ 的前项和为 $S_n(S_n\neq 0)$，则数列 $\frac{1}{S_n}$ 一定是收敛数列

【答案】BCD.

对于A，令 $x_n=1$，则存在 $a=1$，使 $|x_n-a|=0<r$，故A错;

对于B，$|x_n|=|x_1|\cdot|q|^{n-1}$，若 $|q|>1$，则对任意正数 r，当 $n>\log_{|q|}(\frac{r+1}{|x_1|})+1$ 时，$|x_n|>r+1$，所以此时不存在正整数 N 使得定义式成立;

若 $q=1$，显然符合，若 $q=-1$ 为摆动数列 $x_n=(-1)^{n-1}x_1$，只有 $\pm x_1$ 两个值，不会收敛于一个值，所以舍去；$q\in(-1,1)$ 时，取 $a=0$，$N=\left[\log_{|q|}\frac{r}{|x_1|}+1\right]+1$，当 $n>N$ 时，$|x_n-0|=|x_1||q|^{n-1}<|x_1|\frac{r}{|x_1|}=r$，故B正确

对于C，$x_n=\sin(\frac{\pi}{2}n)\cos(\frac{\pi}{2}n)=\frac{1}{2}\sin(\pi n)=0$，符合

对于D，$x_n=x_1+(n-1)d$，$S_n=\frac{d}{2}n^2+(x_1-\frac{d}{2})n$，当 $d>0$ 时，S_n 单调递增并且可以取到比 $\frac{1}{r}$ 更大的正数，当 $n>\dfrac{\frac{d}{2}-x_1+\sqrt{\left(x_1-\frac{d}{2}\right)^2+\frac{2d}{r}}}{d}=N$ 时，$\left|\frac{1}{S_n}-0\right|=\frac{1}{S_n}<r$，$d<0$ 同理，所以D正确.

【取点二】当 $S_n>0$ 时，取 $S_n=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n=n\left(\frac{d}{2}n+a_1-\frac{d}{2}\right)\geqslant\frac{d}{2}n+a_1-\frac{d}{2}$，为使得 $S_n>\frac{1}{r}$，所以只需要 $\frac{d}{2}n+a_1-\frac{d}{2}>\frac{1}{r}\Rightarrow n>\dfrac{\frac{1}{r}-a_1+\frac{d}{2}}{\frac{d}{2}}=\dfrac{2-2ra_1+dr}{dr}=N$

三、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分，请将答案填在题中横线上.

13.若 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2}{3}$，则 $\sin 2\alpha=$________.

【解析】 $\sin 2\alpha=\sin\left[2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{2}\right]=\cos\left[2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\right]=1-2\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{9}$.

14.在$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别为a,b,c，AD为边BC上的中线，若$b=4c=4$且$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}^2$，则$\cos A=$________；中线$AD$的长为________.

【解析】$\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，

则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}^2\Rightarrow\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AB}^2\Rightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}^2\Rightarrow B=\dfrac{\pi}{2}$，

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}^2$，由投影可易知$DB\perp AB$，即$B=\dfrac{\pi}{2}$.

$b=4,c=1$，则$a=\sqrt{15}$，$\cos A=\dfrac{1}{4}$，$AD=\sqrt{c^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{19}}{2}$.

15.若$\{a_n\}$是单调递增的等差数列，且$a_{a_n}=4a_n$，则数列$\{a_n\}$的前10项和为_________.

【解析】设$a_n=kn+b\ (k>0)$，$a_{a_n}=4a_n\Rightarrow k(kn+b)+b=4(kn+b)$，则$\begin{cases}k^2=4k\\kb+b=4b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=4\\b=0\end{cases}$，则$a_n=4n$，则$S_{10}=\dfrac{(4+40)\times10}{2}=220$.

16.若函数$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+b\ln x+ax$在$(1,2)$上存在两个极值点，则$b(3a+b+9)$的取值范围是________.

【解析】$f'(x)=x+\dfrac{b}{x}+a=\dfrac{x^2+ax+b}{x}$，则$g(x)=x^2+ax+b$在$(1,2)$上有两个不同的零点$x_1,x_2$，则$\begin{cases}x_1+x_2=-a\\x_1x_2=b\end{cases}$，则$b^2+3ab+9b=(x_1x_2)^2-3x_1x_2(x_1+x_2)+9x_1x_2=(x_1^2-3x_1)(x_2^2-3x_2)$，$x_1\in(1,2)$，$x_1^2-3x_1\in\left[-\dfrac{9}{4},-2\right)$，同理$x_2^2-3x_2\in\left[-\dfrac{9}{4},-2\right)$，由于$x_1\neq x_2$，$(x_1^2-3x_1)(x_2^2-3x_2)\in\left(4,\dfrac{81}{16}\right)$.

17.设函数$f(x)=\cos2x+m\sin x,x\in(0,\pi)$.

(1)若函数$f(x)$在$x=\dfrac{\pi}{2}$处的切线方程为$y=1$，求m的值；

(2)若$\forall x\in(0,\pi)$，$f(x)>0$恒成立，求m的取值范围.

解：(1)由题意知：$f(\dfrac{\pi}{2})=-1+m=1$，得：$m=2$；

(2)$\forall x\in(0,\pi)$，$f(x)=-2\sin^2x+m\sin x+1>0\Rightarrow m>2\sin x-\dfrac{1}{\sin x}$

令$g(x)=2\sin x-\dfrac{1}{\sin x}$，$x\in(0,\pi)$，则$m>g(x)_{\max}$

$g'(x)=2\cos x+\frac{\cos x}{\sin^2 x}=(\frac{1}{\sin^2 x}+2)\cos x$

$x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 递增；$x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 递减

故 $g(x)_{\max}=g(\frac{\pi}{2})=1$，因此 $m>1$.

18. 设 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$，其中 ω 为正整数，$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$.当 $\varphi=0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{5},\frac{\pi}{5}\right]$ 单调递增且在 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$ 不单调.

(1)求正整数 ω 的值;

(2)在①函数 $f(x)$ 向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位得到奇函数;②函数 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ 上的最小值为 $-\frac{1}{2}$;③函数 $f(x)$ 的一条对称轴为 $x=-\frac{\pi}{12}$ 这三个条件中任选一个补充在下面的问题中，并完成解答.已知函数 $f(x)$ 满足__________，在锐角 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，若 $a<b$，$f(A)=f(B)$.试问:这样的锐角 $\triangle ABC$ 是否存在，若存在，求角 C;若不存在，请说明理由.

注:如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

解：(1)$\varphi=0$ 时，$f(x)=\sin wx$，$w\in N^*$

由题意知：$\frac{\pi}{2w}\in[\frac{\pi}{5},\frac{\pi}{3})\Rightarrow\frac{3}{2}<w\leqslant\frac{5}{2}$

又 $w\in N^*$，故 $w=2$；

(2) 选③；$f(x)=\sin(2x+\varphi)$ 关于 $x=-\frac{\pi}{12}$ 对称

则 $-\frac{\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi\Rightarrow\varphi=\frac{2\pi}{3}+k\pi$，$k\in Z$

又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，故 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$，$f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$

$f(A)=f(B)$，即 $\sin(2A-\frac{\pi}{3})=\sin(2B-\frac{\pi}{3})$

$2A-\frac{\pi}{3}=2B-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ 或 $2A-\frac{\pi}{3}+2B-\frac{\pi}{3}=\pi+2k\pi$，$k\in Z$

即：$A=B+k\pi$ 或 $A+B=\frac{5\pi}{6}+k\pi$，$k\in Z$

又 A，B 为 $\triangle ABC$ 内角，且 $a<b$，故 $A+B=\frac{5\pi}{6}$

因此，这样的 $\triangle ABC$ 存在，且 $C=\frac{\pi}{6}$.

19.设函数 $f(x)=(a-x)e^x$.

(1)求函数的单调区间;

(2)若对于任意的 $x\in[0,+\infty)$,不等式 $f(x)\leqslant x+2$ 恒成立,求 a 的取值范围.

解:(1) $f'(x)=(a-1-x)e^x$

$x<a-1$ 时,$f'(x)>0$;$x>a-1$ 时,$f'(x)<0$

故 $f(x)$ 递增区间为 $(-\infty,a-1)$,递减区间为 $(a-1,+\infty)$;

(2) $\forall x\geqslant 0$,不等式 $(a-x)e^x\leqslant x+2$ 恒成立

即 $\forall x\geqslant 0$,$a\leqslant x+\dfrac{x+2}{e^x}$,令 $g(x)=x+\dfrac{x+2}{e^x}$,$x\geqslant 0$,则 $a\leqslant g(x)_{\min}$

$g'(x)=\dfrac{e^x-x-1}{e^x}$,令 $h(x)=e^x-x-1$,$x\geqslant 0$,$h'(x)=e^x-1\geqslant 0$

故 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 递增,则 $h(x)\geqslant h(0)=0$,即 $g'(x)\geqslant 0$

因此 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 递增,所以,$g(x)_{\min}=g(0)=2$

所以,$a\leqslant 2$.

20.在 $\triangle ABC$ 中,D 为边 BC 上一点,$DC=2$,$\angle BAD=\dfrac{\pi}{6}$.

(1)若 $\overrightarrow{AD}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AC}$,且角 $B=\dfrac{\pi}{6}$,求 AC 的长.

(2)若 $BD=\sqrt{3}$,且角 $C=\dfrac{\pi}{3}$,求角 B 的大小.

解:(1) 因为 $\overrightarrow{AD}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AC}$,则 $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}=\dfrac{2}{5}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{CB}$

又 $CD=2$,则 $CB=5$,$BD=3$,又 $\angle BAD=\angle B=\dfrac{\pi}{6}$,故 $AD=BD=3$,且 $\angle ADC=\dfrac{\pi}{3}$

在 $\triangle ACD$ 中,由余弦定理:$AC^2=AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cos\angle ADC=7$,故 $AC=\sqrt{7}$;

(2) 设 $\angle B=\theta\in(0,\dfrac{\pi}{2})$,则 $\angle ADC=\theta+\dfrac{\pi}{6}$,$\angle CAD=\dfrac{\pi}{2}-\theta$

在 $\triangle ABD$ 中,由正弦定理:$\dfrac{AD}{\sin\theta}=\dfrac{BD}{\sin\angle BAD}=2\sqrt{3}$

在 $\triangle ACD$ 中,由正弦定理:$\dfrac{AD}{\sin C}=\dfrac{CD}{\sin\angle CAD}$,即 $\dfrac{2AD}{\sqrt{3}}=\dfrac{2}{\sin(\dfrac{\pi}{2}-\theta)}=\dfrac{2}{\cos\theta}$

由上述两式得:$\dfrac{\sqrt{3}}{2\sin\theta}=\sqrt{3}\cos\theta\Rightarrow\sin 2\theta=1$

又 $2\theta\in(0,\pi)$,故 $2\theta=\dfrac{\pi}{2}$,即 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$,即 $B=\dfrac{\pi}{4}$.

21.设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,已知$S_3=2a_3,S_4=2a_4+4$

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)令$b_n=\dfrac{a_{n+2}}{2^nS_n}$,设数列$\{b_n\}$的前$n$项和为$T_n$,求证:$T_n<2$.

解:(1) 设$\{a_n\}$的公差为d,由题意知:$\begin{cases}3a_1+3d=2a_1+4d\\4a_1+6d=2a_1+6d+4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=2\\d=2\end{cases}$

故$a_n=a_1+(n-1)d=2n$;

(2) 由 (1) 知:$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=n^2+n$,则$b_n=\dfrac{2(n+2)}{n(n+1)\cdot2^n}=\dfrac{1}{n\cdot2^{n-2}}-\dfrac{1}{(n+1)\cdot2^{n-1}}$

故$T_n=\dfrac{1}{1\cdot2^{-1}}-\dfrac{1}{2\cdot2^0}+\dfrac{1}{2\cdot2^0}-\dfrac{1}{3\cdot2^1}+\cdots+\dfrac{1}{n\cdot2^{n-2}}-\dfrac{1}{(n+1)\cdot2^{n-1}}=2-\dfrac{1}{(n+1)\cdot2^{n-1}}<2.$

22.设函数$f(x)=\mathrm{e}^x-a\sin x-1$.

(1)当$x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$时,$f'(x)>0$,求实数$a$的取值范围;

(2)求证:存在正实数a,使得$xf(x)\geqslant0$总成立.

解：(1) $\forall x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，$f'(x)=e^x-a\cos x>0$

即 $\forall x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，$a<\frac{e^x}{\cos x}$，令 $g(x)=\frac{e^x}{\cos x}$，$x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，则 $g(x)_{\min}>a$

$g'(x)=\frac{e^x(\cos x+\sin x)}{\cos^2 x}$

$x\in(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4})$ 时，$g'(x)<0$，$x\in(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ 时，$g'(x)>0$

故 $g(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4})$ 递减，$(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ 递增

因此，$g(x)_{\min}=g(-\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}}>a$

所以，$a\in(-\infty,\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}})$；

(2) 取 $a=\frac{1}{2}<\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$，则 $f(x)=e^x-\frac{1}{2}\sin x-1$

令 $h(x)=x-\sin x$，$h'(x)=1-\cos x\geqslant 0$，则 $h(x)$ 在 $\boldsymbol{R}$ 上递增

又 $h(0)=0$，故 $x<0$ 时，$h(x)<0$，即 $x<\sin x$；$x>0$ 时，$h(x)>0$，即 $x>\sin x$

① $x>0$ 时，$f(x)>e^x-\frac{1}{2}x-1$，令 $F(x)=e^x-\frac{1}{2}x-1$，$x\geqslant 0$，$F'(x)=e^x-\frac{1}{2}>0$

故 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 递增，因此 $F(x)\geqslant F(0)=0$

所以，$x>0$ 时，$f(x)>0$，即 $xf(x)>0$；

② $x<-\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)<e^{-\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}-1<0$，即 $xf(x)>0$；

③ $x\in[-\frac{\pi}{2},0]$ 时，由 (1) 知：$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{2},0]$ 递增

因此 $f(x)\leqslant f(0)=0$，即 $xf(x)\geqslant 0$；

因此，$a=\frac{1}{2}$ 时，$xf(x)\geqslant 0$ 总成立，即题意得证.