

HPM 视角下的概念教学

— 以正态分布的教学为例

广东省江门市新会第一中学 (529100) 洪伟荣

摘要 HPM 是当前数学教育研究的热点之一. 本文从 HPM 的视角来进行正态分布的教学设计, 希望以此加深学生对该内容的学习, 体现正态分布的价值, 并以此为基础初步探究 HPM 视角下的教学设计的方法.

关键词 HPM; 正态分布; 概念教学; 教学案例

一、正态分布的传统教学及其重要性

1. 正态分布的传统教学

正态分布在高中课程标准中的教学目标是: 通过对正态分布的探究, 结合正态曲线, 加深对正态密度函数的理解, 掌握正态分布在实际生活中的应用. 传统的教学一般致力于让学生记住正态曲线的大致形状及 μ 和 σ 的值对曲线位置与形状的影响. 不重视概念的探究和理解, 特别是忽略了概念发生的过程, 同时也不重视概念的应用. 直接抛出概念的结果, 使“正态分布”留在学生的记忆中只是一个零碎的知识片段, 割裂了知识之间的联系. 所以当学生真正遇到问题时感觉束手无策. 正态分布密度函数是比较复杂的, 学生在学习过程中肯定有畏难情绪, 这也是从 HPM 视角来重新审视这一问题的必要性. 统计知识的学习最终是要为人们制定决策提供依据, 正态分布的应用同样如此.

2. 正态分布的重要性

随着社会的发展, 数据的收集变得越来越容易, 随之而来的问题是数据的分析和使用问题, 统计与概率知识在今后的经济生活中将变得越来越重要. 这在近年的数学高考全国卷中也有所体现. 正态分布是概率论中最重要的一种连续型分布, 同时又是统计学的基石. 而在高中, 正态分布却一直处于比较边缘的地位没有受到高中教师的重视. 我们必须注意到近年全国 I 卷理科数学分别在 2014 年的第 18 题第 (2) 小问和 2017 年的第 19 题整题都围绕着正态分布进行考查. 特别是后者由于我们平时教学不重视导致这一题目的得分率相当的低. 这不得不引起我们高中数学教师的注意, 我们亟需改变以往只让学生粗略地了解正态分布这一概念的教学现状, 而应该从一个全新的视角来开展我们的教学, 不但让学生学“懂”, 还要让学生学“会”.

二、HPM 的概述

HPM 是数学史与数学教育的关系国际小组的一个简称. 自从 1972 年 HPM 成立以来, 数学史与数学教学关系越来越受到数学教育研究者的关注, 特别是 2005 年我国在西北大学第一届全国数学史与数学教育会议的成功召开以来, 数学史融入数学教学得到了越来越多专家的认可, 尤其是在概念教学中融入数学史. 著名的数学家陈省身说过: “了解历史的变化是了解这门科学的一个步骤”, 做为数学的学习同样如此. 随着 HPM 研究的深入, 相关的文献已经逐渐从开始时对数学史融入数学教学必要性和可行性的探讨转向实践研究, 越来越多的研究开始关注数学史与数学教育整合的研究方案, 并开发出一些基于数学史的数学教学案例. 但研究者多数是高校的教师或研究生, 一线高中数学教师开发 HPM 案例还是不多见, 基本上呈现“高评价, 低应用”的现状.^[1]

三、HPM 视角下的正态分布教学案例

1. 概念引入

教师通过电脑展示利用 Flash 软件制作好的高尔顿板模拟实验 (顺便说明高尔顿板实验现在已经被制作成一些游戏机, 引起学生的共鸣)、一次期中考全班、全年级总分的频率分布直方图、《必修 3》100 位居民的月均用水量频率分布直方图 (并回顾直方图中每个小矩形面积的意义, 及所有小矩形面积之和), 进一步展示当样本容量增加后得到的总体密度曲线, 引入正态分布密度曲线.

2. 拟合函数

(1) 教师引导学生观察正态分布密度曲线这一条光滑的钟型曲线, 引导学生利用已经学习的初等函数来拟合函数. 初步确定该曲线对应的函数应该是一个由指数函数及二次函数复合而成的函数, 且其对称轴为 $x = \mu$, 其开口大小与 σ 的值有关系;

(2) 为什么要使用 e 作为底数呢? 教师着重强调 e 为底的指数式在积分或导数的运算中的便捷性.

为什么正态分布密度函数中的指数式要以 e 为底——数学家在大量的指、对数运算中发现以 e 为底的指数式在积分或导数的运算中最为简单, 我们在学习选修 2-2 导数与定积分地运算中应该能够感知一二, 如 $(e^x)' = e^x$,

$(a^x)' = a^x \ln a$, 前者比后者的运算显然更简单, 而如使用后者在导数和积分的运算中同样会出现 e . 所以以 e 为底既是“自然”的选择, 更是运算的选择.^[3]

(3) 展示 10 马克钱币的图片并介绍高斯与正态分布的数学历史, 强调正态分布在统计学中的历史地位激发学生学习兴趣.

早在 1733 年, 法国数学家棣莫弗在二项分布正态逼近的研究中, 用 $n!$ 的近似公式得到了正态分布, 但其成果不够完善, 并没有引起人们的重视; 直到 1809 年德国数学家高斯在研究测量误差时完善了正态分布理论, 对正态分布的广泛应用奠定了扎实的理论基础, 并赢得了人们的普遍关注和研究. 其使用范围也不断扩展, 从天文学、测地学到生物学、社会科学……, 至今正态分布被广泛地用于生活、生产、教育以及科学研究的各个领域. 高斯是一位伟大的数学家, 有数学王子的美誉, 其一生在数学研究方面硕果累累, 他对数学工作精益求精, 只有将问题研究通透了, 他才发表, 在正态分布的研究方面也体现了这一精神, 为了纪念其贡献, 德国 10 马克印有高斯的头像, 在其上还印有正态分布密度曲线, 可见正态分布是多么重要的一个发现.^[2]

以此为基础教师给出正态分布密度函数.

3. 函数的图象及性质

函数解析式 $\varphi_{\mu, \sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, 其中 $\mu = E(X)$, $\sigma = \sqrt{D(X)}$ ($\sigma > 0$) 为参数. 一般地, 如果对于任何实数 a, b ($a < b$), 随机变量 X 满足 $P(a < X \leq b) = \int_a^b \varphi_{\mu, \sigma}(x) dx$, 则称 X 服从正态分布, 记为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

引导学生得到正态曲线有如下的特点:

(1) $f(x) > 0$ 恒成立, 曲线位于 x 轴的上方, 与 x 轴不相交;

(2) 曲线是单峰的, 开口向下, 它关于直线 $x = \mu$ 对称;

(3) 曲线在 $x = \mu$ 处达到峰值 $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$;

(4) 曲线与 x 轴之间的面积为 1;

利用计算机演示 μ, σ 的取值对钟型曲线的位置、开口大小的影响, 总结如下特点:

(5) 当 σ 一定时, 曲线的位置由 μ 确定, 随着 μ 的变化沿 x 轴平移;

(6) 当 μ 一定时, 曲线的形状由 σ 确定, σ 越大, 曲线越“矮胖”, 表示总体分布越分散; σ 越小, 曲线越“瘦高”, 表示总体分布越集中.

4. 正态分布的初步应用

(I) 教师介绍正态分布在三个常用特殊区间内取值的概率取值 $P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) \approx 0.6827$, $P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$, $P(\mu - 3\sigma < X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$ 并介

绍 3σ 原则及极大似然法;

(II) 通过课堂练习熟悉正态分布:

例 1 给出下列正态总体的函数表达式, 请找出其均值 μ 和标准差 σ :

$$(1) f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, x \in (-\infty, +\infty);$$

$$(2) f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{8}}, x \in \mathbb{R}.$$

例 2 在一次测试中, 测量结果 X 服从正态分布 $N(2, \sigma^2)$ ($\sigma > 0$), 若 X 在 $(0, 2)$ 内取值的概率为 0.2, 求:

(1) X 在 $(0, 4)$ 内取值的概率;

(2) $P(X > 4)$.

例 3 在某次数学考试中, 考生的成绩 X 服从一个正态分布, 即 $X \sim N(90, 100)$.

(1) 试求考试成绩 X 位于区间 $(70, 110)$ 上的概率;

(2) 若这次考试共有 2 000 名考生, 试估计考试成绩在 $(80, 100)$ 间的考生大约有多少人?

(III) 介绍正态分布的常见应用, 感受其强大的普适性, 并让学生完成例 4 体会正态分布的应用.

正态分布的应用——研究表明, 一个随机变量如果是受到众多的、独立的、不分主次的随机因素的影响, 那么它就服从或近似服从正态分布. 如: 长度测量的误差, 射击时弹着点与靶心间的距离, 一定条件下生长的同种植物的高度, 正常生产条件下各种产品的质量指标 (如尺寸、重量等), 某一地区同龄人的身高、体重、肺活量等等.^[4] 实例 (例 4): 公共汽车车门的高度设计——某型号的公共汽车车门的高度要求按成年男子与车门顶碰头的概率不高于 0.135% 来设计. 假设男子身高 $X \sim N(170, 49)$, 问车门高度应设计为多高? (单位: cm)

5. 课堂小结

四、HPM 的意义

1. 从教师层面来说, 教师统过 HPM 的研究可以了解更多的数学文化, 增强自己的数学素养, 借鉴历史便于找到突破教学难点的方法.

2. 从学生层面来说, 学生通过 HPM 下的教学, 可以拓展学生的视野, 帮助学生理解所学的知识, 激发学生学习数学的兴趣, 改变学生的数学观, 培养学生的探索精神, 帮助学生掌握科学的学习方法.

3. 从教学层面上来说, HPM 为我们的教学研究和实践提供了一个新的视角. 2019 高考数学全国卷进一步增强了数学文化的考察力度, 数学史不再是课堂的润滑剂, 已是高考的考察内容, 是在数学课堂中落实“立德树人”很好的素材. (下接第 43 页)

三章《三角恒等变换》的全部内容,没有找到直接以“已知 $\tan \alpha$, 求解 $\tan 2\alpha$ ”的形式呈现的例题或者课后练习题. 倒是在教材第 3.1.3 节《二倍角的正弦、余弦、正切》的课后练习第 135 页发现了第 4 题:

例 3 (教材必修 4 第 135 页练习第 4 题) 已知 $\tan 2\alpha = \frac{1}{3}$, 求 $\tan \alpha$ 的值^[4].

尽管不是要寻找的“已知 $\tan \alpha$, 求解 $\tan 2\alpha$ ”的形式, 但是跟问题很接近了. 再细想, 这就是笔者要寻找的答案“ $\tan 2\alpha$ 的值唯一, $\tan \alpha$ 满足什么条件”. 由二倍角公式得 $\frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{1}{3}$, 解得 $\tan \alpha = -3 + \sqrt{10}$, 或 $\tan \alpha = -3 - \sqrt{10}$. 也就是说, $\tan \alpha = -3 + \sqrt{10}$, 或 $\tan \alpha = -3 - \sqrt{10}$ 也能使得 $\tan 2\alpha$ 的值唯一.

(3) 问题与猜想

为了研究方便, 将上述两个问题提取, 归纳出问题:

① 若 $\tan \alpha = -\frac{1}{3}$ 或 $\tan \alpha = 3$, 则 $\tan 2\alpha = -\frac{3}{4}$ 是唯一值;

② 若 $\tan \alpha = -3 + \sqrt{10}$ 或 $\tan \alpha = -3 - \sqrt{10}$, 则 $\tan 2\alpha = \frac{1}{3}$ 也是唯一值.

问题: 若 $\tan \alpha_1$ 与 $\tan \alpha_2$ 满足什么条件, 则 $\tan 2\alpha$ 唯一? 通过对两个 $\tan \alpha$ 重新进行四则运算的尝试, 有以下规律: 两个 $\tan \alpha$ 值相乘都满足: $-\frac{1}{3} \times 3 = -1$, $(-3 + \sqrt{10})(-3 - \sqrt{10}) = -1$. 于是猜测: 若 $\tan \alpha_1 \cdot \tan \alpha_2 = -1$, 则 $\tan 2\alpha$ 的值唯一.

(4) 挖掘本质

在经历了例 1 的背景与本质: 斜率存在的两条直线互相垂直, 斜率之积为 -1 . 笔者决定从解析几何的角度, 对问题进行探究. 设直线 OA 的斜率为 $k_{l_{OA}} = \tan \alpha_1$, 直线 OB 的斜率

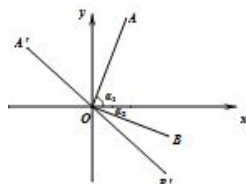


图 3

为 $k_{l_{OB}} = \tan \alpha_2$, 由于 $\tan \alpha_1 \cdot \tan \alpha_2 = -1$, 故直线 $OA \perp OB$, 即 $\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$. 对于 $\tan 2\alpha$, 如图, $2\alpha = 2\alpha_1 = \angle A'Ox$, 或者 $2\alpha = 2\alpha_2 = \angle B'Ox$, 则 $\tan 2\alpha = k_{OA'}$ 或 $\tan 2\alpha = k_{OB'}$, 由于 $\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$, 故 $2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2(\alpha_1 + \alpha_2) = \pi$, 说明 $\angle A'OB' = \pi$, 即 A', O, B' 三点共线. 故 2α 的终边 OA', OB' 落在同一直线 $A'B'$ 上, 由于直线 $A'B'$ 的斜率唯一, 故 $\tan 2\alpha$ 的唯一. 由此可见, 例 2, 例 3 的本质也是斜率存在的两条直线互相垂直, 斜率之积为 -1 .

以上便是笔者关于三角恒等变换的一些思考, 题目立足教材、来源高考, 从考查的要求, 命题者希望强调通性通法, 突出转化与化归的思想; 从教育工作者的角度, 应该站在不一样的观点来重新认识、审视这些司空见惯的问题. “寻常一样窗前月, 才有梅花便不同”, 三角函数是几何的, 其次是函数的, 还是运算的 (三角恒等变换), 有了这样的观点指导, 平常的东西也能品出不一样的芬芳; 有了新的角度, 问题的联系, 知识系统的形成才会更加完善.

参考文献

- [1] 教育部考试中心. 高考文科试题分析 (2016 年版) [M]. 北京: 高等教育出版社. 2016.
- [2] 王森生. 追寻三角发展史, 领悟主编意图, 理清教学困惑 [J]. 中国数学教育. 2016, (1-2).
- [3] 陈发志蔡小雄. 年年岁岁“题”相似, 岁岁年年“意”不同——浙江省高考数学 2013 年第 6 题与 2008 年第 8 题的比较 [J]. 中学数学教学参考. 2013, (11).
- [4] 刘绍学. 普通高中课程标准实验教科书数学 4 (必修 A 版) [M]. 北京: 人民教育出版社. 2012.

(上接第 16 页)

五、HPM 下的教学案例开发方法初探

1. 教师是教学史融入教学过程的主体, 教师要对相应的教学内容的史料及文献进行搜集、阅读、整理, 并考虑将其融入到适当的教学环节当中;

2. 要充分发挥学生的主动性, 现在学生查找资料的能力并不亚于老师, 在学生查找资料、选择资料的过程中也是一种学习数学史的过程; 但学生在课堂展示相关史料必须经过加工和教师的斟酌, 以提高针对性和效率;

3. HPM 要服务于教学, 增强教学的效果, 促进学生相

关知识的学习, 不能为讲数学史而讲数学史, 应将数学史融入教学过程当中, 解决教学的难点, 解决学生的困惑, 要有的放矢, 不应泛泛而谈, 促进教学目标的完成.

参考文献

- [1] 牟娟. 基于数学史的高中概率与统计的教学案例开发 [D]. 西北师范大学, 2014.
- [2] 吴江霞. 正态分布进入统计学的历史演化 [D]. 河北师范大学, 2008.
- [3] 陈仁政. 不可思议的 e [M]. 科学出版社, 2005. 76-80.
- [4] 魏宗舒. 概率论与数理统计教程 [M]. 高等教育出版社, 1983. 113-117.