一类三角函数的周期性问题探究

周思宇　(湖南省长沙市周南中学　410008)

周期性是函数的重要性质之一,也是高考数学的高频考点.对于经常遇到的一些函数,如 $y=\sin x$,$y=\sin 2x$,$y=\sin\sqrt{2}x$ 等,我们很容易判断它们具有周期性并求出其最小正周期.但这些函数的组合,例如 $y=\sin x+\sin 2x$,$y=\sin x+\sin\sqrt{2}x$ 等,是否仍然是周期函数?如果是,最小正周期又是多少?我们知道,两个奇函数(或偶函数)相加,如果新函数的定义域关于原点对称,则新函数仍具有奇偶性.因此,上述问题即变为:假设 $f_1(x)$,$f_2(x)$ 都是定义在实数集上的周期函数,$F(x)=f_1(x)+f_2(x)$ 是否也是周期函数?[1] 对这类问题一些学者已作出系统性的研究,并得到了相应的结论.本文对函数周期性问题进行一个简要概述,并重点针对三角多项式的周期性进行解读,希望能对读者的数学学习提供帮助.

由于常值函数没有最小正周期,故本文所研究的函数都是定义在实数集上的连续非常值函数.

1　两周期函数之和的周期性

引理 1　设 $f_1(x)$,$f_2(x)$ 是定义在实数集 M 上的周期函数,T_1,T_2 分别为它们的周期,若 $\frac{T_1}{T_2}$ 为有理数,则 $f_1(x)+f_2(x)$ 也是 M 上的周期函数.

证明　设 $\frac{T_1}{T_2}=\frac{p}{q}$($p$,$q$ 为整数,且 $q\neq 0$),故 $pT_2=qT_1$,则对任意 $x\in M$,有 $f_1(x+qT_1)+f_2(x+pT_2)=f_1(x)+f_2(x)$.所以 $f_1(x)+f_2(x)$ 是周期函数,周期 $T=pT_2=qT_1$(不一定是最小正周期).

这里的 T 可以视为 T_1 与 T_2 的"公倍数".公倍数与最小公倍数原是在自然数范围内考虑,这里借用这一名称是为了方便,现对其意义作一个说明:若干个实数的公倍数是指同时是其中每个数的整数倍的数,最小公倍数是公倍数中最小的一个正数.[2]

同理可以推出,$f_1(x)-f_2(x)$,$f_1(x)\cdot f_2(x)$,$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$($f_2(x)\neq 0$)也具有类似引理 1 的性质.

根据引理 1 我们可以知道,$y=\sin x+\sin 2x$ 是周期函数,2π 是它的一个周期.

推论　设 $f_1(x)$,$f_2(x)$,…,$f_n(x)$ 都是实数集 M 上的周期函数,T_1,T_2,…,T_n 分别是它们的周期,若 T_1,T_2,…,T_n 中任意两个之比为有理数,则这 n 个函数的和(或差、积、商)也是 M 上的周期函数,周期是 T_1,T_2,…,T_n 的一个公倍数.

对于引理 1 与推论有三处需要说明:

(1)两个周期函数的和(或差、积、商)不一定是周期函数,只有在 $\frac{T_1}{T_2}$ 是有理数的情况下才满足.

(2)引理 1 只是对两个函数的和(或差、积、商)的周期性提出了一个充分条件.也就是说两个非周期函数或者一个周期函数与一个非周期函数的和(或差、积、商)也有可能是周期函数.例如,$f_1(x)=\sin x+x$ 与 $f_2(x)=\sin x-x$ 都不是周期函数,但 $f_1(x)+f_2(x)$ 是周期函数.

(3)如果引理 1 中 T_1,T_2 都是最小正周期,则 $T=pT_2=qT_1$ 不一定是 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 的和(或差、积、商)的最小正周期.例如 $f_1(x)=\sin^2 x$ 与 $f_2(x)=\cos^2 x$ 的最小正周期为 π,但 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$,不存在最小正周期.

从上面可以看出,函数的周期性以及最小正周期是一个很复杂的问题.这里我们把研究范围缩小到三角多项式函数,并给出一个判断周期性的充要条件.

2　三角多项式的周期性

加强引理 1 的条件,可以得到如下几个判断函数周期性的充要条件.

定理 1　设 $f_1(x)=\sin\omega_1 x$,$f_2(x)=\sin\omega_2 x$($\omega_1>0$,$\omega_2>0$,且 $\omega_1\neq\omega_2$),则 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 的和(或差、积、商)是周期函数的充要条件是 $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ 为有理数.

证明　(充分性)由引理易证.

(必要性)[3] 设 $F(x)=\sin\omega_1 x+\sin\omega_2 x$ 为

周期函数,则存在非 0 常数 T,使得 $\sin\omega_1(x+T)+\sin\omega_2(x+T)=\sin\omega_1 x+\sin\omega_2 x$,即 $\sin\omega_1(x+T)-\sin\omega_1 x=-[\sin\omega_2(x+T)-\sin\omega_2 x]$,即 $2\cos\left(\omega_1 x+\frac{\omega_1 T}{2}\right)\cdot\sin\frac{\omega_1 T}{2}=-2\cos\left(\omega_2 x+\frac{\omega_2 T}{2}\right)\cdot\sin\frac{\omega_2 T}{2}$ ①,且对于任意 $x\in\mathbf{R}$,① 式恒成立.故 $\sin\frac{\omega_1 T}{2}=\sin\frac{\omega_2 T}{2}=0$,即 $\frac{\omega_1 T}{2}=k_1\pi$,$\frac{\omega_2 T}{2}=k_2\pi$($k_1,k_2\in\mathbf{Z}$,且 k_1,k_2 都不为 0).故 $\omega_1=\frac{2k_1\pi}{T}$,$\omega_2=\frac{2k_2\pi}{T}$,所以$\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{k_1}{k_2}$ 为有理数.差、积、商的情况也可以类比得到.

用类似方法可以得到 $\sin\omega_1 x$ 与 $\cos\omega_2 x$,$\cos\omega_1 x$ 与 $\cos\omega_2 x$,$\tan\omega_1 x$ 与 $\tan\omega_2 x$ 也具备类似定理 1 的结论.

根据定理1,我们容易判断 $y=\sin x+\sin\sqrt{2}x$ 不是周期函数.

定理 1 虽然给出了判断三角多项式是否具有周期性的一个充要条件,但是没有告诉我们它的最小正周期是多少.对于一般的周期函数,要具体找出最小正周期并无一般方法,但对于常见的三角多项式,可以找到一般方法.为了更好地得到这个方法,我们先给出一个引理.

引理 2　若 $f(x)$ 是定义在实数集上的连续周期函数且 $f(x)$ 不是常值函数,则 $f(x)$ 必有最小正周期.

证明　假设 $f(x)$ 没有最小正周期,则 $f(x)\equiv f(0)$,证明如下:

因为 $f(x)$ 连续,故对任意 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得只要 $|x'|<\delta$,就有 $|f(x')-f(0)|<\varepsilon$.因为 $f(x)$ 不存在最小正周期,故可以找到 $f(x)$ 的一个周期 $T<\delta$,对任意实数 x,存在整数 n,使得 $x=nT+m$,$0\leqslant m<T$.因为 $|m|<\delta$,所以有 $|f(x)-f(0)|=|f(m)-f(0)|<\varepsilon$.由于 ε 和 x 具有任意性,故 $f(x)\equiv f(0)$,这与 $f(x)$ 不是常值函数矛盾,故 $f(x)$ 有最小正周期.

定理 2[4]　设 $f_1(x)=\sin\omega_1 x$,$f_2(x)=\sin\omega_2 x$($\omega_1>0$,$\omega_2>0$ 且 $\omega_1\neq\omega_2$),若 ω_1 与 ω_2 是有理数,则 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 的和(或差、积、商)的最小正周期是 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 最小正周期的最小公倍数.

证明　设 $F(x)=\sin\omega_1 x+\sin\omega_2 x$,由定理 1 知,$F(x)$ 是周期函数.设 T 是 $F(x)$ 的一个正周期,要得到 $F(x)$ 的最小正周期,相当于求方程 $F(x+T)=F(x)$ 的最小正值.

根据定理 1 的证明知,$T=\frac{2k_1\pi}{\omega_1}$,$T=\frac{2k_2\pi}{\omega_2}$($k_1,k_2\in\mathbf{Z}$),故 $T=\frac{k_1\cdot 2\pi}{\omega_1}=k_1\cdot T_1$,$T=\frac{k_2\cdot 2\pi}{\omega_2}=k_2\cdot T_2$($T_1$,$T_2$ 分别是 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 的最小正周期).所以 T 是 T_1 与 T_2 的公倍数,根据引理 2 知,$F(x)$ 必有最小正周期.因此,T_1 与 T_2 的最小公倍数为 $F(x)$ 的最小正周期.

同理,$\sin\omega_1 x$ 与 $\cos\omega_2 x$,$\cos\omega_1 x$ 与 $\cos\omega_2 x$,$\tan\omega_1 x$ 与 $\tan\omega_2 x$ 也具备类似定理 2 的结论.

推论[4]　设 $F(x)=(a_1\sin\omega_1 x+b_1\cos\omega_1 x)+(a_2\sin\omega_2 x+b_2\cos\omega_2 x)+\cdots+(a_k\sin\omega_k x+b_k\cos\omega_k x)$,其中 ω_i 是互不相同的正有理数,a_i,b_i($i=1,2,\cdots,k$)不同时为零,则 $F(x)$ 的最小正周期为各项最小正周期的最小公倍数.

由此,我们可以得出 $y=\sin x+\sin 2x$ 的最小正周期为 2π.

例　求 $f(x)=\sin\frac{x}{3}+\cos\frac{x}{2}$ 的最小正周期.

解析　由定理 1 知 $f(x)$ 为周期函数,且 $\sin\frac{x}{3}$ 的最小正周期为6π,$\cos\frac{x}{2}$ 的最小正周期为 4π.由定理 2 知,$f(x)$ 的最小正周期为 12π.

函数的周期性是一个非常复杂的问题,本文旨在抛砖引玉,所研究的内容也仅仅是冰山一角.要想了解更多有关周期性的内容,还需读者继续涉猎相关知识.

参考文献

[1]　刘长剑,汤正谊.两个周期函数的和的周期性[J].大学数学,2016,32(4):82-84.

[2]　张方盛,林纬华.谈谈函数周期性问题[J].数学通报,1980(10):23-28.

[3]　宣立新.两个三角函数的和差积商的周期性[J].南京师大学报(自然科学版),1984(4):48-57.

[4]　马明.三角多项式的恒等定理兼谈三角函数的周期[J],数学通报,1963(6):27-30.