江苏省仪征中学 2019 届高考考前数学热身练 8

一．填空题：

1．已知集合 $A=\{2,0,1,7\}$，$B=\{y\,|\,y=7x,x\in A\}$，则 $A\bigcap B=$_______.

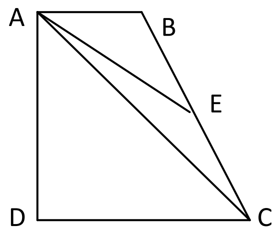
2．已知复数 $z=\dfrac{i}{\sqrt{3}+i}$（i 为虚数单位），则 $z\cdot\overline{z}=$________.

3．一组数据共 40 个，分为 6 组，第 1 组到第 4 组的频数分别为 10，5，7，6，第 5 组的频率为 0.1，则第 6 组的频数为________.

4．阅读下列程序，输出的结果为________.

$$
\begin{array}{l}
S\leftarrow 0\\
For\ I\ \ from\,1\ to\ 10\ step\ 3\\
\qquad S\leftarrow S+I\\
\ End\ \ for\\
\ \mathrm{Print}\ S
\end{array}
$$

（第 4 题）



第 8 题

5．将甲、乙两个不同的球随机放入编号为 1，2，3 的 3 个盒子中，每个盒子的放球数量不限，则 1，2 号盒子中各有 1 个球的概率为_______.

6．设变量 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}x-1\leqslant 0,\\ x+y+1\geqslant 0,\\ x-y+3\geqslant 0,\end{cases}$ 则目标函数 $z=2x+y$ 的最小值是________.

7．若 $\tan(\alpha+\dfrac{\pi}{4})=2$，则 $\sin 2\alpha$ 的值为_________.

8．如图，在直角梯形 $ABCD$ 中，$AB//CD$，$\angle ADC=90^{\circ}$，$AB=3, AD=\sqrt{2}$，E 为 BC 的中点，若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3$，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BC}=$________.

9. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}|\log_2 x|,0<x\le 2\\ 3-x,2<x<3\end{cases}$，若关于 x 的方程 $f^2(x)+(t-3)f(x)+t-2=0$ 有且只有 3 个不同的实数根，则实数 t 的取值集合为____________.

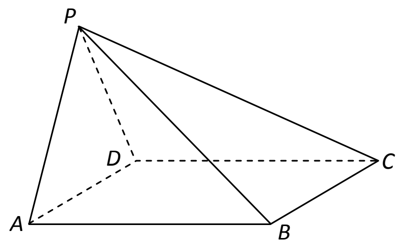
10. 已知 ΔABC 的三个内角为 A,B,C，且满足 $\sin^2 A+sin^2B=\sin^2 C-\sqrt{2}\sin A\sin B$，则 $\sin 2A\cdot\tan^2 B$ 的最大值为____________.

二．解答题：

11．如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，$PA\perp$ 平面 PDC．

（1）求证：平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$；

（2）在棱 PD 上是否存在一点 E，使得 $PB//$平面 EAC？如果存在，请找出点 E 并加以证明；如果不存在，请说明理由．



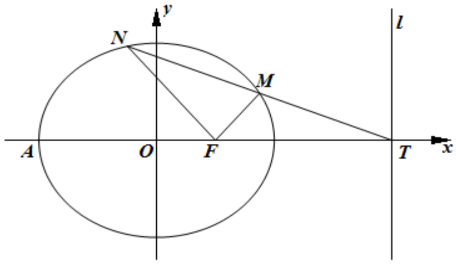
12. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左顶点为 A，右焦点为 F，右准线为 l， l 与 x 轴相交于点 T，且 F 是 AT 的中点.

（1）求椭圆的离心率;

（2）过点 T 的直线与椭圆相交于 M,N 两点，M,N 都在 x 轴上方，并且 M 在 N,T 之间，且 $NF=2MF$.

①记 $\Delta NFM,\Delta NFA$ 的面积分别为 S_1,S_2，求 $\dfrac{S_1}{S_2}$；

②若原点 O 到直线 TMN 的距离为 $\dfrac{20\sqrt{41}}{41}$，求椭圆方程.



三．附加题：

1．在极坐标系中，设曲线C的方程为$\rho=4\sin\theta$，直线l的方程为$\rho\cos(\theta+\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$．

已知O为极点，直线l与曲线C交于A,B两点，求ΔAOB的面积．

2．甲、乙两位同学参加数学建模比赛．在备选的 5 道题中，甲答对每道题的概率都是$\frac{2}{3}$；乙能答对其中的 3 道题．甲、乙两人都从备选的 5 道题中随机抽出 3 道题独立进行测试．规定至少答对 2 题才能获奖．

（1）求甲答对的题数X的分布列和数学期望；

（2）求甲、乙至少有一人获奖的概率．

江苏省仪征中学2019届高考考前数学热身练8参考答案

1．$\{0,7\}$　　2．$\frac{1}{4}$　　3．8　　4．22　　5．$\frac{2}{9}$　　6．-3　　7．$\frac{3}{5}$　　8．-3

9．$\left\{2,5-2\sqrt{2}\right\}$　　10．$3-2\sqrt{2}$

11．（1）因为 $PA\perp$平面 PDC，$CD\subset$平面 PDC，

所以 $PA\perp CD$．

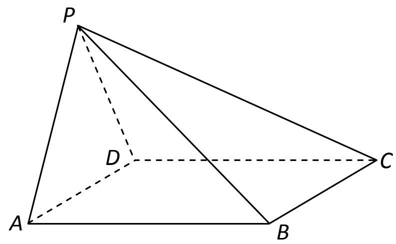
因为四边形 $ABCD$ 为矩形，所以 $AD\perp CD$．

因为 $PA\cap AD=A$，PA，$AD\subset$平面 PAD，

所以 $CD\perp$平面 PAD．

因为 $CD\subset$平面 $ABCD$，

所以平面平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$．



(2)当点 E 为棱 PD 中点时，$PB\parallel$平面 ACE．

取棱 PD 中点 E，连接 BD 与 AC 相交于点 O，连结 OE．

因为四边形 $ABCD$ 为矩形，所以 O 为 BD 中点．

因为 E 为棱 PD 中点，所以 $PB\parallel OE$．

因为 $PB\not\subset$平面 EAC，$OE\subset$平面 ACE，

所以直线 $PB\parallel$平面 ACE．

12．【解析】(1) 因为 F 是 AT 的中点，所以 $-a+\frac{a^2}{c}=2c$，即 $(a-2c)(a+c)=0$，又 a、$c>0$，所以 $a=2c$，所以 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$；

(2) ①过 M,N 作直线 l 的垂线，垂足分别为 M_1,N_1，则 $\frac{NF}{NN_1}=\frac{MF}{MM_1}=e$，

又 $NF=2MF$，故 $NN_1=2MM_1$，故 M 是 NT 的中点，$\therefore\frac{S_{\Delta MNF}}{S_{\Delta TNF}}=\frac{1}{2}$，

又 F 是 AT 中点，$\therefore S_{\Delta ANF}=S_{\Delta TNF}$，$\therefore\frac{S_1}{S_2}=\frac{1}{2}$；

②解法一：设 $F(c,0)$，则椭圆方程为 $\frac{x^2}{4c^2}+\frac{y^2}{3c^2}=1$，

由①知 M 是 N,T 的中点，不妨设 $M(x_0,y_0)$，则 $N(2x_0-4c,2y_0)$，

又 M,N 都在椭圆上，即有 $\begin{cases}\frac{x_0^2}{4c^2}+\frac{y_0^2}{3c^2}=1\\\frac{(2x_0-4c)^2}{4c^2}+\frac{4y_0^2}{3c^2}=1\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\frac{x_0^2}{4c^2}+\frac{y_0^2}{3c^2}=1\\\frac{(x_0-2c)^2}{4c^2}+\frac{y_0^2}{3c^2}=\frac{1}{4}\end{cases}$

两式相减得 $\frac{x_0^2}{4c^2}-\frac{(x_0-2c)^2}{4c^2}=\frac{3}{4}$，解得 $x_0=\frac{7}{4}c$，可得 $y_0=\frac{3\sqrt{5}}{8}c$，

故直线 MN 的斜率为 $k=\frac{\frac{3\sqrt{5}}{8}c}{\frac{7}{4}c-4c}=-\frac{\sqrt{5}}{6}$，

直线 MN 的方程为 $y=-\frac{\sqrt{5}}{6}(x-4c)$，即 $\sqrt{5}x+6y-4\sqrt{5}c=0$

原点 O 到直线 TMN 的距离为 $d=\frac{4\sqrt{5}c}{\sqrt{5+36}}=\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{41}}c$，

依题意$\dfrac{4\sqrt{5}}{\sqrt{41}}c=\dfrac{20\sqrt{41}}{41}$，解得$c=\sqrt{5}$，故椭圆方程为$\dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{15}=1$.

解法二：设$F(c,0)$，则椭圆方程为$\dfrac{x^2}{4c^2}+\dfrac{y^2}{3c^2}=1$，

由①知 M 是N,T的中点，故 $2x_1-x_2=4c$，

直线 MN 的斜率显然存在，不妨设为 k，故其方程为 $y=k(x-4c)$，与椭圆联立，并消去 y 得：$\dfrac{x^2}{4c^2}+\dfrac{k^2(x-4c)^2}{3c^2}=1$，整理得$(4k^2+3)x^2-32ck^2x+64k^2c^2-12c^2=0$，(*)

设$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，依题意$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{32ck^2}{4k^2+3} \\ x_1x_2=\dfrac{64k^2c^2-12c^2}{4k^2+3} \end{cases}$

由$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{32ck^2}{4k^2+3} \\ 2x_1-x_2=4c \end{cases}$解得$\begin{cases} x_1=\dfrac{16ck^2+4c}{4k^2+3} \\ x_2=\dfrac{16ck^2-4c}{4k^2+3} \end{cases}$

所以$\dfrac{16ck^2+4c}{4k^2+3}\times\dfrac{16ck^2-4c}{4k^2+3}=\dfrac{64k^2c^2-12c^2}{4k^2+3}$，解之得 $k^2=\dfrac{5}{36}$，即 $k=-\dfrac{\sqrt{5}}{6}$.

直线 MN 的方程为$y=-\dfrac{\sqrt{5}}{6}(x-4c)$，即$\sqrt{5}x+6y-4\sqrt{5}c=0$

原点O到直线TMN的距离为$d=\dfrac{4\sqrt{5}c}{\sqrt{5+36}}=\dfrac{4\sqrt{5}c}{\sqrt{41}}$，

依题意$\dfrac{4\sqrt{5}c}{\sqrt{41}}=\dfrac{20\sqrt{41}}{41}$，解得$c=\sqrt{5}$，故椭圆方程为$\dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{15}=1$.

附加：

1. 【解】以极点为原点，极轴为 x 轴的正半轴建立平面直角坐标系 xOy .

由$\rho\cos(\theta+\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{1}{2}$得$\sqrt{3}\rho\cos\theta-\rho\sin\theta=1$，所以$\sqrt{3}x-y-1=0$；

由$\rho=4\sin\theta$化为直角坐标方程为$x^2+y^2=4y$即$x^2+(y-2)^2=4$

所以圆心 (0 2)到直线 l 的距离为$d=\dfrac{3}{2}$

所以$AB=2\sqrt{4-d^2}=\sqrt{7}$

由极点 O 到直线 l 的距离为$d'=\dfrac{1}{2}$

所以△ OAB 的面积为$\dfrac{\sqrt{7}}{4}$。

2. (1) 据题意， X 的所有可能取值分别为 0 ， 1 ， 2 ， 3 .

因为甲答对其中每道题的概率都是$\dfrac{2}{3}$，所以$X\sim B(3,\dfrac{2}{3}),P(X=k)=C_3^k(\dfrac{2}{3})^k(1-\dfrac{2}{3})^{3-k},k=0,1,2,3$

所以 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{8}{27}$

所以 X 的数学期望 $E(X)=0\times\frac{1}{27}+1\times\frac{6}{27}+2\times\frac{12}{27}+3\times\frac{8}{27}=2$

（注：直接使用公式计算 $E(X)=3\times\frac{2}{3}=2$ 也可）

（ 2 ）记“甲获奖”为事件 A ，设乙答对的题数为 Y ，“乙获奖”为事件 B ．

$P(A)=P(X=2)+P(X=3)=\frac{20}{27}$， $P(B)=P(Y=2)+P(Y=3)=\frac{C_3^2C_2^1}{C_5^3}+\frac{C_3^3C_2^0}{C_5^3}=\frac{7}{10}$

记“甲、乙至少有一人获奖”为事件 M ，则 $\overline{M}$ 为“甲、乙两人都未获奖”.

$P(M)=1-P(\overline{M})=1-P(\overline{AB})=1-P(\overline{A})P(\overline{B})=1-(1-\frac{20}{27})(1-\frac{7}{10})=\frac{83}{90}$.

答：甲、乙至少有一人获奖的概率为 $\frac{83}{90}$.