



围绕“四基”的数学微专题教研*

——以椭圆定义教学中的“类比思想”为例

上海复旦大学附属中学 200433 肖恩利 张建国

【摘要】 如何改进传统教学,落实新课程标准?本文以椭圆定义教学中的“类比思想”为例,通过剖析17篇教学设计(实录)中使用的类比对象(或教具),提出我们的思考,即要抓住数学的本质,使用恰当的数学语言和模型描述问题;另一方面,围绕“四基”,将教学以微专题形式进行解剖,寻找最佳的教学方法。

【关键词】 椭圆;细绳实验;Dandelin球;类比;“四基”;微专题

随着新课程标准的落地和新教材的推出,“核心素养”“四基”“四能”等概念已深入人心。如何理解新课程标准的理念并贯彻实施新课程标准的要求,成为一线教师亟待解决的问题。在研究课程标准,改进教学实践的过程中,我们逐步认识到,学习标准的关键是要有主线,实践标准的关键是要有抓手。抓手是什么?这是本文要讨论的问题。

新课程标准指出,数学教育引导学生“会用数学眼光观察世界,会用数学思维思考世界,会用数学语言表达世界”,这“三会”是数学教育的终极目标,其中数学思维的主要表现是逻辑推理。在此基础上,新课标把“三会”具体化,赋予其核心素养的内涵,其中,逻辑推理“是数学严谨性的基本保证,是人们在数学活动中进行交流的基本思维品质”,包含归纳、类比、演绎等形式。为了更具体地将培养数学核心素养的理念贯彻到数学教学中,新课标将传统数学教育中的“双基”发展为“四基”,凸显了数学基本思想的重要性,使数学思想成为贯穿于高中数学内容的“灵魂”。史宁中教授指出^[21]，“推理”是数学基本思想的要素之一。因此,我们认为:实践新课标的抓手是数学思想。为此,我们需要重新梳理传统数学教学,理清数学思想的脉络,并由此来重组数学教学,以期学生在整体上把握数学内容,形成良好的数学认知结构。下文以椭圆定义教学中的“类比思想”为例详细阐明我们的思考过程。当然,以下的一些思考仅仅是笔者的一些拙见,如有不当,请予以指出。

我们知道,“椭圆及其标准方程”在解析几何的学习中具有承前启后的功能。一方面,在学习椭圆之前,学生已经初步掌握了研究解析几何问题的基本方法,学习了直线和圆这两个基本的曲线,而椭圆的定义和

部分几何性质与圆有高度的类似性,利用圆的某些性质可类似得到椭圆的相应性质,此为“承前”;另一方面,椭圆的研究方法最大化地反映了解析几何的本质,即用代数方法研究曲线的几何性质,这是研究圆锥曲线的基本方法之一,椭圆的学习为接下来学习双曲线、抛物线提供了基本模式和理论基础。进一步,由于圆锥曲线的统一性,利用椭圆的某些性质可类似得到双曲线和抛物线的相应性质,此为“启后”。从这个角度看,“椭圆”的学习连通了解析几何的基础理论与圆锥曲线的核心内容。

另外,“椭圆及其标准方程”的学习有三条主线,一是“内容主线”,即椭圆的定义、性质、标准方程,以及直线与椭圆的交点问题;二是“思想方法主线”,包括坐标法、类比等;三是“核心素养主线”,如“数学抽象”(椭圆定义的形成)“直观想象”(椭圆对称性的分析)“数学运算”(椭圆标准方程的推导)。而在这三条主线中,“思想方法主线”正是前述椭圆“连通功能”的基本途径,其中“类比”的功能尤为关键,其关键性不仅体现在椭圆与圆的类比过程中,也体现在椭圆与双曲线和抛物线的类比过程中,可以说,“类比”是椭圆学习过程中的灵魂。

为了研究“类比”在椭圆定义教学中的使用情况^[9,10],也为了做好实施新教材的准备,我们以“椭圆”和“教学”为主题搜索了中国知网,得到了2657条结果,从中随机抽取了2018年到2020年发表的20篇文章,并就其中的17篇文章进行了重点研究,研究的内容围绕引入椭圆定义的类比对象或教具展开,包括生活情境(如油罐车截面、鸡蛋截面等)、自然科学(如卫星轨道等)、数学实验(如椭圆规、折纸、细绳实验等)、数学对象(如圆、平面截圆柱(锥)、Dandelin戴德

* 本文系第四期“上海市双名工程”暨杨浦区中小学幼儿园中青年骨干教师团队发展计划“数学资优生的培养体系建设与实施”部分成果。



据不同对象之间的类似特征,通过逻辑推理,由对象 A 的性质得到对象 B 的相应性质,因此,两个对象的类似特征才是使用类比方法的出发点.我们知道,圆的本质属性是“定点”和“定长”,与“角度”是完全不同的特征,何谈类比?至于为何不研究差、积或商,或者定点个数为什么不是 3 个,而是 2 个,这就涉及到推理的基本原则——先易后难.相对于“和”(加数与被加数可交换)而言,“差”(减数与被减数不能交换)和“积”(代数式次数较高)是两个难度稍大的运算,而“商”,学生在学习直线和圆的时候,已经有所接触.另一方面,点数的增加,意味着约束条件的增加,相应地,问题的描述难度、解决方法的复杂程度等可能大大增加,这又偏离了中学数学的学习要求.更何况,与到若干个点的距离满足一定条件相关的几何问题,学生并不陌生,如到两个定点距离相等的动点轨迹是中垂线,到三角形三个顶点的距离相等的点是三角形的外心等.所以,笔者认为上面的说法并不能否定圆的类比功能.实际上,只要教师引导学生选准类比角度,用圆作类比还是兼具起点低、易观察、易理解和科学性等优点的.例如,若将圆等曲线的关键信息制成下面的表格:

到 n 个点的距离	条件	轨迹
1	等于正常数	圆
2	相等	中垂线
?	?	?

则从第一列和第二列的角度来看,都有类比或者拓展的可能性,学生可以提出各种各样的想法,只要教师进行适当的说明和引导,这对于培养学生的数学抽象、直观想象等核心素养还是大有裨益的.

问题 3 要充分重视“平面截圆柱(锥)”“Dandelin 球”等模型的功能,但要明确定位,选准时机

一般认为,椭圆定义的发展历经 2000 多年^{[7][16]},从古希腊人在圆柱或圆锥的截口中发现椭圆到阿波罗尼斯在《圆锥曲线论》中采用了截线的定义,从洛必达将椭圆定义为“平面上到两个定点的距离之和等于常数的动点的轨迹”到 Dandelin 通过利用两个内切球推导出椭圆的性质,从而统一了两个定义.而现行教科书上呈现的只是其丰富的发展历史的一个轮廓.因此,还原历史,让学生体验椭圆定义的“发生与发展”也是一种教学设计的出发点,这样的教学设计往往从平面截圆柱(锥),或 Dandelin 球开始,分析图形的几何性质,形成椭圆的定义,如文[2]、文[8]、文[18]和文[19].这样的处理需要学生对平面、球等几何对象的特征有基本的认知.但仔细研读这些教学设计就会发现,在完成椭圆定义之后,平面截圆柱(锥)、Dandelin 球就不见踪影了.打个比方,这两个几何对象是“介绍人”,甲(学生)与乙(解析几何)通过“介绍人”的介绍而熟悉之后,“介绍人”就隐身了.也就是说,在解析几何的本体知识中,这两个几何对象的存在感是比较微弱的,这是为什么?这与平面解析几何的本质相关.平面解析几何的本质是用代数方法研究平面几何问题,而这两个几何对象的处理使用的是传统立体几何的方法,相比较于细绳实验,其在研究椭圆几何性质过程中的功能性会有所减弱.因此,这样的处理是否会冲淡平面解析几何的教学主题?这是一个值得探讨的问题.

在上面列举的 4 篇文章中,文[18]和文[19]使用了圆锥中的 Dandelin 球模型,文[2]、文[8]、文[18]都使用了圆柱中的 Dandelin 球模型.应该说圆柱的 Dandelin 球是 Dandelin 球的简化版本,但从进一步学习双曲线和抛物线的角度来看,该模型无法导出双曲线和抛物线的情形,“不足以说服学生消除‘如何类似地得到双曲线和抛物线的定义’的疑问”^[20],也就是说,圆柱的 Dandelin 球模型在学生在学习双曲线和抛物线时会造成一定的困扰,学生更多地会感叹这种模型的巧妙,却无法体验基本的数学思想方法.因此, Dandelin 球应以何种形式何时呈现给学生,也是值得探讨的问题.以笔者愚见,平面截圆柱(锥)和 Dandelin 球蕴含着丰富的历史文化内涵,如果将这方面的内容定位于圆锥曲线定义之后的数学史或数学文化介绍,是否可行?

以上就是我们在梳理椭圆定义教学中,针对“类比思想”的一些思考,当然,这些思考还要结合具体的学生和学习情况.从更广义的角度看,“类比思想”是创设教学情境的一种常用方法,这就要求教师要抓住数学的本质,围绕数学中重要的、本质的概念、原理和解决问题的思维方式来提出问题,使用恰当的数学语言和模型描述问题.另一方面,围绕新课标提出的“四基”,从吸收传统教学的优秀经验,重新梳理教学内容的角度看,还有大量类似的问题值得我们思考和研究.我们认为,微专题的方式是一种有效的方式.围绕同一个教学内容,将不同的教学组织方式按照微专题进行解剖,提炼共同的数学思想,寻找最佳的教学方法,是学习和实践新课程标准的永恒课题.

以上就是我们在梳理椭圆定义教学中,针对“类比思想”的一些思考,当然,这些思考还要结合具体的学生和学习情况.从更广义的角度看,“类比思想”是创设教学情境的一种常用方法,这就要求教师要抓住数学的本质,围绕数学中重要的、本质的概念、原理和解决问题的思维方式来提出问题,使用恰当的数学语言和模型描述问题.另一方面,围绕新课标提出的“四基”,从吸收传统教学的优秀经验,重新梳理教学内容的角度看,还有大量类似的问题值得我们思考和研究.我们认为,微专题的方式是一种有效的方式.围绕同一个教学内容,将不同的教学组织方式按照微专题进行解剖,提炼共同的数学思想,寻找最佳的教学方法,是学习和实践新课程标准的永恒课题.

参考文献

[1] 杨春花. 预习·探究·应用·巩固——以椭圆为标准教学为例谈高中数学课堂教学的步骤[J]. 数学教学通讯, 2019(2): 29-31.
 [2] 花奎. HPM 视角下的“椭圆及其标准方程”教学[J]. 中学教育, 2019(02): 50-54.



[3] 王成丽. 布卢姆教育目标分类学指导下的高中数学学科核心素养之直观想象研究——以“椭圆及其标准方程”为例[J]. 中国数学教育(高中版), 2019, 195(3): 28-34.

[4] 吴仲玲. “椭圆及其标准方程”的教学优化设计[J]. 中学数学教学参考(下旬), 2019(9): 18-20.

[5] 崔永红. 创新椭圆教学设计, 培养数学核心素养[J]. 福建中学数学, 2018(8): 16-18.

[6] 吴青平. 从 APOS 理论看椭圆概念的建构[J]. 福建中学数学, 2018(11): 18-21.

[7] 汪智源. 从 HPM 视角构建“椭圆的标准方程”教学[J]. 中学数学月刊, 2019(6): 42-43+46.

[8] 易文辉. 从教材内容的疑点处挖掘核心素养的生长点——以“椭圆的定义”为例[J]. 中学数学研究, 2019(1): 34-36+11.

[9] 罗德建, 伍春兰. 核心素养视域下的“椭圆及其标准方程”的教学改进[J]. 数学通报, 2019, 58(5): 40-44.

[10] 金振华. 基于发展学生数学学科核心素养的课堂教学策略——以“椭圆标准方程”为例[J]. 上海课程教学研究, 2020(5): 51-54.

[11] 刘彦强. 基于核心素养视角的“椭圆及其标准方程”的教学设计[J]. 课程教育研究, 2020(9): 121-122.

[12] 张萍. 基于研究方法学习的数学教学设计——以“椭圆的方程”的教学为例[J]. 福建中学数学, 2019(4): 14-17.

[13] 李现勇. 聚焦核心素养, 优化课堂教学——以“椭圆及其标准方程”为例[J]. 中学数学教学参考(上旬), 2019(1-2): 29-32.

[14] 李云真. 例谈“椭圆标准方程的推导和化简”的核心素养培养[J]. 中学数学, 2019(4): 76-79.

[15] 刘剑锋, 唐睿. 例探数学概念课教学中如何揭示知识本质——“椭圆的定义及标准方程”教学案例[J]. 中学数学, 2020(6): 5-6.

[16] 沈金兴, 王华. 落实“立德树人”根本任务下的 HPM 教学——以“椭圆及其标准方程”为例[J]. 中国数学教育, 2019, 203(11): 55-60.

[17] 刘润慧. 数学抽象素养视角下的“支架式”教学——以“椭圆及其标准方程”的教学为例[J]. 高中数学教与学, 2020(3): 18-20+32.

[18] 桂佳. 数学史融入椭圆标准方程的教学设计[J]. 高中数学教与学, 2020(3): 47-49.

[19] 刘峥嵘. 数学文化视角下“椭圆及其标准方程”的教学策略[J]. 福建中学数学, 2018(1): 22-25.

[20] 王海青. 谈 Dandelin 双球模型的构建及其教学价值[J]. 数学通报, 2020, 59(1): 10-13+18.

[21] 史宁中, 王尚志. 普通高中数学课程标准(2017年版)解读[M]. 北京: 高等教育出版社, 2018.

[22] 国家市场监督管理总局, 中国国家标准管理委员会. 中华人民共和国国家标准 GB18564.1-2019[S], 2019.

作者简介 肖恩利(1976—), 男, 山东烟台人, 上海复旦大学附属中学教师, 研究方向: 数学教育.

张建国(1977—), 男, 河南临颍县人, 上海复旦大学附属中学教师, 研究方向: 数学教育.

高三数学深度学习的施教策略探讨*

江苏省木渎高级中学 215101 李雅萍

【摘要】 理解认知、高阶思维、整体联通是深度学习的三大特征. 针对这三大特征, 高三数学教师在教学中沿着这三个方向去开展教学, 可引导学生深入思考问题的本质, 建立恰当的联系, 在解决问题时能准确选用最高效的策略.

【关键词】 高三数学; 深度学习; 施教策略

“高三是炒冷饭”“讲了很多遍学生还是不会”, 这是高三老师普遍会遇到的问题. 学生通过高一、高二对新知识的学习, 以量的方式获取了高中数学分散的、零碎的知识. 他们大多数能够理解单一的知识, 也知道这些知识之间存在的某些简单联系, 但是

往往不能找到那些藏在背后的复杂和深层联系. 所以学习层次还停留在浅层学习. 相关研究发现, 相比浅层学习, 那些使用深度学习法的学生记住所学内容的时间更长久, 能更快地整合信息并表达, 有更好的创新思维能力, 学习的效益更高.

* 本文是江苏省教育科学“十三五”规划重点资助课题《学习科学视域下发展学生高阶思维的路径研究》(课题编号: R-a/2020/03)、苏州市“十三五”规划课题《基于学生深度学习的师生共同体构建研究》(课题编号: 192006242)的阶段性研究成果.