常规题改编为探究题的变式方法初探

江苏省射阳县教育局教研室 王克亮

新课程提倡问题探究.探究问题时,学生会尽可能地调出脑中已储备的数学知识与方法试着来解决问题,尽管很多情况下不一定能成功,但在这个试的过程中,学生就会有许多感悟.接下来再将自己的想法与其他同学或老师的做法进行比较,学生将会有新的感悟.在这样不断的感悟中,学生的能力就有了提升.由此可知,问题探究是提升学生数学能力的有效途径之一,因而教学中给出一些有价值的问题来引领学生显得尤为重要.

纵观以前的探究性问题,基本上为"是否存在型",即探求满足题意的某个量是否存在,存在的就求出来,不存在的请说明理由.显然这种单一形式的探究性问题已满足不了新课程的教学与测试的需要,教师迫切希望看到一些形式多样而又新颖适用的探究性问题.

为此,我们可以做些探索,对身边的一些常规题目进行改编,使其成为探究性问题.在最近的一次全县高三联考命题时,笔者试着将几道常规题目进行了变式,使其有了一些探究题的味道,没想到这一点点的初探与思考竟得到了充分的肯定,师生们普遍反映试题"新"而"活",能力要求很高,体现了新课程理念.下面笔者就把一些题目的变式方法与思想展示出来,以期抛砖引玉.

1 去掉结论,使得问题的指向性不明,可形成一道"结论探究型"问题

例1 如图1,在$\triangle ABC$中,$AB\perp AC$,$AD\perp BC$,D为垂足,则$AB^2=BD\cdot BC$(射影定理).

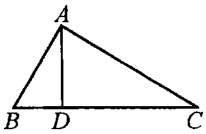

图1

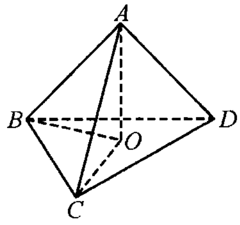

图2

改编前:类似有命题:在三棱锥A-BCD(图2)中,$AD\perp$平面ABC,$AO\perp$平面BCD,O为垂足,且O在$\triangle BCD$内,则$S^2_{\triangle ABC}=S_{\triangle BCO}\cdot S_{\triangle BCD}$.该命题是( ).

A.真命题

B.假命题

C.增加"$AB\perp AC$"的条件才是真命题

D.增加"三棱锥A-BCD是正三棱锥"的条件才是真命题

改编后:如图2所示,在三棱锥A-BCD中,$AD\perp$平面ABC,$AO\perp$平面BCD,O为垂足,且O在$\triangle BCD$内.类比射影定理,试探究$S_{\triangle ABC}$、$S_{\triangle BCO}$、$S_{\triangle BCD}$这三者之间满足怎样的关系式____.

解析:如图3所示,连结DO并延长交BC于点E,连结AE.因为$AD\perp$平面ABC,所以$AD\perp AE$.而$AO\perp$平面BCD,所以$AO\perp DE$,则在$\triangle AED$中运用射影定理得$AE^2=EO\cdot ED$.从而

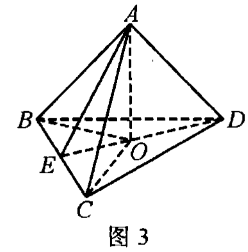

图3

$$\left(\frac{1}{2}\cdot BC\cdot AE\right)^2=\left(\frac{1}{2}\cdot BC\cdot EO\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot BC\cdot ED\right),$$

即$S^2_{\triangle ABC}=S_{\triangle BCO}\cdot S_{\triangle BCD}$.

评注:去掉结论往往会增大题目的难度,因而这种变式方法通常用在类比型的问题中.

2 削弱条件,反过来由结论探求某个条件,可形成一道"条件探究型"问题

例2 如图4,已知$ABCD$是矩形,$AD=4$,$AB=2$,E、F分别是线段AB、BC的中点,$PA\perp$平面$ABCD$.

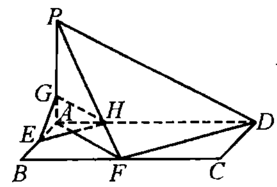

图4

(1)求证:$PF\perp FD$;

改编前:(2)设点G在

PA 上,且 $PG=3GA$,求证:EG∥平面 PFD.

改编后:(2)设点 G 在 PA 上,且 EG∥平面 PFD,试探究点 G 的位置.

解:(1)略;

(2)过 E 作 EH∥FD 交 AD 于 H,则 EH∥平面 PFD,且 $AH=\frac{1}{4}AD$.再过 H 作 HG∥PD 交 PA 于 G,则 GH∥平面 PFD,且 $AG=\frac{1}{4}PA$.

连结 EG,由 EH∥平面 PFD 且 GH∥平面 PFD,知平面 EHG∥平面 PFD,则 EG∥平面 PFD.

从而点 G 满足 $AG=\frac{1}{4}PA$.

评注:习惯了正向的推理与验算,这种变式手法可培养学生的逆向思维能力.

3 增设台阶,将难题变得容易些,可形成一道"多步探究型"问题

例 3 [背景知识]计算机把信息存储在磁盘上,磁盘是带有磁性介质的圆盘,并由操作系统将其格式化成磁道和扇区.磁道是指不同半径所构成的同心圆轨道,扇区是指被圆心角分割成的扇形区域.磁道上的定长的弧可作为基本存储单元,根据其磁化与否可分别记录数据 0 或 1,这个基本单元通常称为比特.磁盘的构造如图 5 所示.

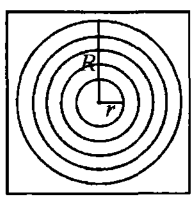

图 5

为了保障磁盘的分辨率,磁道之间的宽度不得小于 m,每比特所占用的磁道长度不得小于 n.为了数据检索的方便,磁盘格式化时要求所有磁道具有相同的比特数,最外面的磁道不存储任何信息.磁盘的存储量=存储信息的磁道数×每磁道的比特数.

改编前:现有一张半径为 R 的磁盘,它的存储区是半径介于 r 和 R 的环形区域.

(1)是不是 r 越小,磁盘的存储量就越大?

(2)r 为多少时,磁盘具有最大的存储量?

改编后:[问题探究]现有一张半径为 R 的磁盘,它的存储区是半径介于 r 和 R 的环形区域.(注:以下讨论时,结果不要求一定取整数)

(1)这张磁盘可用来存储信息的磁道数最多可达多少条?

(2)每磁道上的比特数最多可达到多少?

(3)是不是 r 越小,磁盘的存储量就越大?

(4)r 为多少时,磁盘具有最大的存储量?

解:(1)这张磁盘可用来存储信息的磁道数最多可达$\frac{R-r}{m}$条.

(2)为获得最大的存储量,最内一条磁道必须装满,故每磁道上的比特数最多可达$\frac{2\pi r}{n}$.

(3)因为该磁盘的总存储量为 $f(r)=\frac{R-r}{m}\cdot\frac{2\pi r}{n}=\frac{2\pi}{mn}\cdot r(R-r)=\frac{2\pi}{mn}\cdot(-r^2+Rr)$,它是关于 r 的二次函数,从解析式上可以看出,不是 r 越小,磁盘的存储量越大.

(4)因为 $f'(r)=\frac{2\pi}{mn}\cdot(-2r+R)$,由 $f'(r)=0$,得 $r=\frac{R}{2}$.当 $r<\frac{R}{2}$ 时,$f'(r)>0$;当 $r>\frac{R}{2}$ 时,$f'(r)<0$.因此,当 $r=\frac{R}{2}$ 时,磁盘具有最大的存储量,且最大存储量为$\frac{\pi R^2}{2mn}$.

评注:该题源自 2004 年哈尔滨理工大学数学建模竞赛试卷,后被人教 A 版普通高中课程标准实验教科书《数学(选修 2-2)》选用.原竞赛题较难,但将其化成多个小题后,每小题即是一个提示,前为后用,步步铺垫,降低了题目的难度,增强了题目的可探究性.

4 变更题意,隐藏题目较为明显的外露特征,可形成一道"转化探究型"问题

例 4 已知函数 $f(x)=x^2+a|x|+x$,$x\in\mathbf{R}$,$a\in\mathbf{R}$.

(1)当 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$时,试比较 $\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$与 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$的大小;

改编前:(2)若不等式 $\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]\geqslant f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$对任意的 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$ 都成立,求 a 的取值范围.

改编后:(2)当 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$ 时,若 $\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$与 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$的大小关系与(1)的结论一致,试探究 a 的取值范围.

解:(1)$\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]\geqslant f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$.(过程略)

(2) 当 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$ 时，$\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$ 与 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ 的大小关系与(1)的结论一致，即等价于 $\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]\geqslant f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ 对 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$ 恒成立.

而 $\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]\geqslant f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\Leftrightarrow\frac{(x_1-x_2)^2}{2}\geqslant a[|x_1+x_2|-(|x_1|+|x_2|)]$.

①若 $x_1\cdot x_2\geqslant 0$，即要求 $\frac{(x_1-x_2)^2}{2}\geqslant a\cdot 0$ 对 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$ 恒成立，此时 $a\in\mathbf{R}$；

②若 $x_1\cdot x_2<0$，不妨设 $x_1<0<x_2$，则要求 $\frac{(x_1-x_2)^2}{2}\geqslant a(|x_1+x_2|+x_1-x_2)$ 恒成立.

(i)当 $x_1+x_2\geqslant 0$ 时，即要求 $\frac{(x_1-x_2)^2}{2}\geqslant 2ax_1$ 对 $x_1<0<x_2$ 恒成立，即 $a\geqslant\frac{(x_1-x_2)^2}{4x_1}$ 对 $x_1<0<x_2$ 恒成立. 又当 $x_1<0<x_2$ 时，$\frac{(x_1-x_2)^2}{4x_1}<0$，故此时 $a\geqslant 0$；

(ii)当 $x_1+x_2<0$ 时，即要求 $\frac{(x_1-x_2)^2}{2}\geqslant -2ax_2$ 对 $x_1<0<x_2$ 恒成立，即 $a\geqslant-\frac{(x_1-x_2)^2}{4x_2}$ 对 $x_1<0<x_2$ 恒成立. 又当 $x_1<0<x_2$ 时，$-\frac{(x_1-x_2)^2}{4x_2}<0$，故此时 $a\geqslant 0$.

综上所述，使得 $\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$ 与 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ 的大小关系与(1)的结论一致的 a 的取值范围为 $a\geqslant 0$.

评注：改编前学生一看便知是不等式的恒成立问题，而改编后，需要对题意进行等价转化，增强了问题的探究性.

以上仅是笔者对常规题改编为探究题的变式手法的一些肤浅思考，更多方法还有待于我们在实践中不断地加以探索与总结.

(上接第35页)

$$\frac{1}{a^3(b+c)}=\frac{\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}=\frac{\frac{1}{a^2}}{t-\frac{1}{a}},$$

同理 $\frac{1}{b^3(a+c)}=\frac{\frac{1}{b^2}}{t-\frac{1}{b}}$，$\frac{1}{c^3(a+b)}=\frac{\frac{1}{c^2}}{t-\frac{1}{c}}$.

从而命题转化为 $a,b,c\in\mathbf{R}_+$，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=t$，求证：

$$\frac{\frac{1}{a^2}}{t-\frac{1}{a}}+\frac{\frac{1}{b^2}}{t-\frac{1}{b}}+\frac{\frac{1}{c^2}}{t-\frac{1}{c}}\geqslant\frac{3}{2}. \quad ①$$

令 $f(x)=\frac{x^2}{t-x}(0<x<t)$，$\because f''(x)=\frac{2t^2}{(t-x)^3}>0$，

$\therefore f(x)$ 为下凸函数.

$$\therefore\frac{f\left(\frac{1}{a}\right)+f\left(\frac{1}{b}\right)+f\left(\frac{1}{c}\right)}{3}\geqslant f\left[\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3}\right]$$

$$=f\left(\frac{t}{3}\right)=\frac{\frac{t^2}{9}}{t-\frac{t}{3}}=\frac{t}{6}.$$

$\therefore$ ①式左边 $\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

$\geqslant\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}}=\frac{3}{2}$.

命题得证.

(2)形如："在 $x_i>0,i=1,2,\cdots,n$，且 $\sum_{i=1}^{n}x_i=m$ 的条件下，$\prod_{i=1}^{n}f(x_i)\leqslant k$(或 $\geqslant k$)成立"型不等式的证明.

分析：可通过取对数进行转换变成第一种情形.

例3 已知 $x_i\in\mathbf{R}_+,i=1,2,3,\cdots,n$，$\sum_{i=1}^{n}x_i=1$. 求证：$\prod_{i=1}^{n}\left(x_i+\frac{1}{x_i}\right)\geqslant\left(n+\frac{1}{n}\right)^n$.

证明：$\because x_i+\frac{1}{x_i}>0$，欲证

$\prod_{i=1}^{n}\left(x_i+\frac{1}{x_i}\right)\geqslant\left(n+\frac{1}{n}\right)^n$，只需证

$$\ln\left[\prod_{i=1}^{n}\left(x_i+\frac{1}{x_i}\right)\right]\geqslant\ln\left(n+\frac{1}{n}\right)^n. \quad ②$$

令 $f(x)=\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)$，$x\in(0,1)$，则 $f''(x)=\frac{4x^2+(1+x^2)(1-x^2)}{(x^3+x)^2}>0$，故 $f(x)$ 为严格下凸函数.

$$\therefore\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}\geqslant f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)$$

$$=f\left(\frac{1}{n}\right)=\ln\left(n+\frac{1}{n}\right),$$

即 $\sum_{i=1}^{n}\ln\left(x_i+\frac{1}{x_i}\right)\geqslant n\ln\left(n+\frac{1}{n}\right)$ 成立，从而

$\prod_{i=1}^{n}\left(x_i+\frac{1}{x_i}\right)\geqslant\left(n+\frac{1}{n}\right)^n$ 成立.