

陪位中线与陪位重心

汪学思

(安徽省安庆市第二中学东区 246003)

三角形的中线是大家熟知的,但陪位中线却鲜为人知.如图 1, AD 是 $\triangle ABC$ 的中线,点 D' 在 BC 边上,若满足 $\angle BAD = \angle CAD'$,则称 AD' 为 $\triangle ABC$ 的一条陪位中线(也称为共轭中线).我们知道三角形的三条中线交于一点,该点是三角形的重心.三角形的三条陪位中线也相交于一点,这个点就是三角形的陪位重心(也称为三角形的共轭重心).其证明如下:

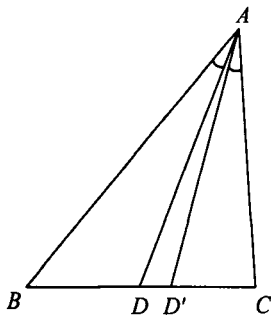


图 1

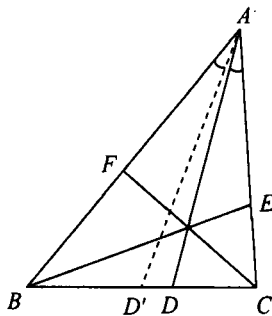


图 2

如图 2, 在 $\triangle ABC$ 中, AD' 是中线, AD 、 BE 、 CF 分别是其三条陪位中线.

则 $S_{\triangle ABD'} = S_{\triangle ACD'}$

$\Leftrightarrow AB \cdot \sin \angle BAD' = AC \cdot \sin \angle CAD'$

$\Leftrightarrow \frac{\sin \angle BAD'}{\sin \angle CAD'} = \frac{AC}{AB},$

因为 AD 为陪位中线 $\Leftrightarrow \angle BAD = \angle CAD'$

$\Leftrightarrow \frac{\sin \angle BAD}{\sin \angle CAD} = \frac{\sin \angle CAD'}{\sin \angle BAD'} = \frac{AB}{AC};$

同理 $\frac{\sin \angle CBE}{\sin \angle ABE} = \frac{BC}{BA}, \frac{\sin \angle ACF}{\sin \angle BCF} = \frac{CA}{CB}$

$\Rightarrow \frac{\sin \angle BAD}{\sin \angle CAD} \cdot \frac{\sin \angle CBE}{\sin \angle ABE} \cdot \frac{\sin \angle ACF}{\sin \angle BCF}$

$= \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BC}{BA} \cdot \frac{CA}{CB} = 1.$

所以由 Ceva 定理知 AD 、 BE 、 CF 三线共点.

若设其交点为 K , 则点 K 为 $\triangle ABC$ 的陪位重心.

因为 AD 为陪位中线

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{BD}{DC} &= \frac{S_{\triangle BAD}}{S_{\triangle CAD}} = \frac{AB \sin \angle BAD}{AC \sin \angle CAD} \\ &= \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AB}{AC} = \frac{AB^2}{AC^2}. \end{aligned}$$

所以由以上过程我们可得如下三角形陪位中线性质.

性质 1 (1) AD 是 $\triangle ABC$ 的陪位中线

$$\Leftrightarrow \frac{\sin \angle BAD}{\sin \angle CAD} = \frac{AB}{AC};$$

(2) AD 是 $\triangle ABC$ 的陪位中线 $\Leftrightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB^2}{AC^2}.$

下面来讨论三角形陪位中线与陪位重心的另一些有趣的性质.

性质 2 如图 3, AD 为 $\triangle ABC$ 的陪位中线, E 、 F 两点分别在 AC 、 AB 上, 满足 $DE \parallel BA$ 、 $DF \parallel CA$, 则有 F 、 B 、 C 、 E 四点共圆.

证明 因为 AD 是 $\triangle ABC$ 的陪位中线,

所以 $\frac{BD}{DC} = \frac{AB^2}{AC^2},$

又 $\frac{BD}{DC} = \frac{BD}{BC} \cdot \frac{BC}{DC} = \frac{AE}{AC} \cdot \frac{AB}{AF},$

所以 $\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{AE}{AC} \cdot \frac{AB}{AF} \Rightarrow \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AE}{AF}$

$\Rightarrow AB \cdot AF = AC \cdot AE,$

从而得到 F 、 B 、 C 、 E 四点共圆.

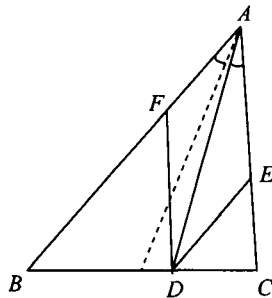


图 3

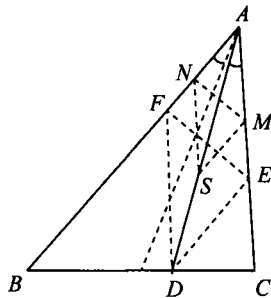


图 4

性质 3 如图 4, AD 为 $\triangle ABC$ 的陪位中线,

M, N 两点分别在 AC, AB 上, 若 B, C, M, N 四点共圆, 则 AD 平分 MN .^[1]

证明 作 $DE \parallel BA, DF \parallel CA$ 交 AC, AB 于 E, F 点, 连结 EF . 由性质 2 知 B, C, E, F 四点共圆 $\Rightarrow \angle AEF = \angle ABC$.

作 $MS \parallel DE$ 交 AD 于 S , 连结 NS , 由 B, C, M, N 四点共圆, 有 $\angle AMN = \angle ABC$; 因为 $\angle AMN = \angle AEF$, 所以 $MN \parallel EF$.

于是 $\frac{AN}{AF} = \frac{AM}{AE} = \frac{AS}{AD} \Rightarrow NS \parallel DF$.

此时四边形 $AMSN$ 为平行四边形, 所以 AS 平分 MN , 即 AD 平分 MN .

性质 4 如图 5, 点 K 是 $\triangle ABC$ 的陪位重心, 过 K 点作 $MN \parallel BC, PQ \parallel CA, ST \parallel AB$, M, N, P, Q, S, T 都在 $\triangle ABC$ 的边上, 则有上述六点共圆.

证明 连结 AK 并延长交 BC 于 D 点.

因为点 K 是 $\triangle ABC$ 的陪位重心, 所以 AD 必是 $\triangle ABC$ 的陪位中线.

因为 $\frac{MK}{KN} = \frac{BD}{DC} = \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{AM^2}{AN^2}$,

所以 AK 是 $\triangle AMN$ 的陪位中线.

由于 $KS \parallel AM, KQ \parallel AN$, 利用性质 2,

可得 M, N, S, Q 四点共圆 ①

同理 P, Q, M, T 四点共圆 ②

S, T, P, N 四点共圆 ③

连结 MT , 因为

$$\begin{aligned} \angle TMN &= 180^\circ - \angle AMN - \angle BMT \\ &= 180^\circ - \angle ABC - \angle BPQ \text{ (由②得)} \\ &= 180^\circ - \angle STC - \angle ACB = \angle TSN, \end{aligned}$$

所以 M, T, N, S 四点共圆 ④

比较③、④可得 M, T, P, N, S 五点共圆;

再比较②, 则得到 M, T, P, N, S, Q 六点共圆.

性质 4 是由三角形陪位重心而得到的一组六点共圆 (此圆被称为第一勒穆瓦纳 (Lemoine) 圆^[2]).

下面的性质 5 提示的又一组六点共圆也是由三角形陪位重心得到的.

性质 5 如图 6, 过 $\triangle ABC$ 的陪位重心 K 作三直线交各边于 M, N, P, Q, T, S , 若 B, C, N, M 四点共圆, C, A, Q, P 四点共圆, A, B, T, S 四点共圆, 则有 M, N, P, Q, T, S 六点共圆.

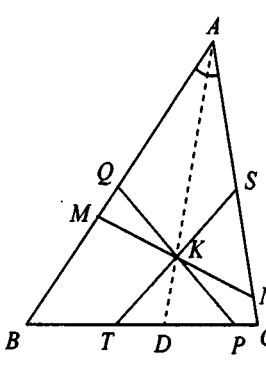


图 6

证明 由已知的三组四点共圆, 易得

$$\angle KTP = \angle BAC = \angle KPT \Rightarrow KT = KP;$$

$$\text{同理 } KN = KS, KQ = KM \dots\dots\dots ①$$

连结 AK 并延长交 BC 于 D ,

则 AD 为 $\triangle ABC$ 的陪位中线.

由 B, C, N, M 四点共圆,

利用性质 3 可得 $KM = KN$.

$$\text{同理 } KP = KQ, KT = KS \dots\dots\dots ②$$

比较①、②得

$$KM = KT = KP = KN = KS = KQ.$$

所以 M, N, P, Q, T, S 六点共圆, 并且这个六点圆的圆心就是 $\triangle ABC$ 的陪位重心 K (此圆被称为第二勒穆瓦纳 (Lemoine) 圆^[2]).

观察图 6, 记 $\triangle ABC$ 的三内角分别为 $\angle A, \angle B, \angle C$,

$$\text{则在 } \triangle TKP \text{ 中有 } \frac{TP}{\sin \angle TKP} = \frac{KP}{\sin \angle KTP}$$

$$\Rightarrow \frac{TP}{\sin 180^\circ - 2\angle A} = \frac{KP}{\sin \angle A}$$

$$\Rightarrow TP = 2KP \cos \angle A.$$

$$\text{同理 } NS = 2KS \cos \angle B, QM = 2KM \cos \angle C$$

$$\Rightarrow TP : NS : QM = \cos \angle A : \cos \angle B : \cos \angle C.$$

故可得如下性质.

性质 6 如图 7, 在性质 5 的前提下, M, N, P, Q, T, S 六点圆在 $\triangle ABC$ 三边上截得的三条弦长的比是

$$TP : NS : QM = \cos \angle A : \cos \angle B : \cos \angle C.$$

现在我们回顾性质 4, 参见图 5, 由陪位重心 K 得到的六点共圆在

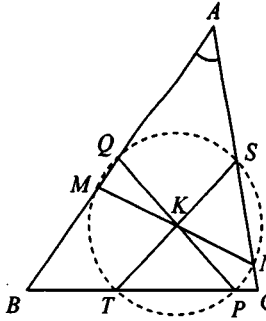


图 7

$\triangle ABC$ 各边上截得的弦长 $TP:NS:QM$ 又有什么结论呢? 请看下面的性质.

性质 7 如图 8, 过 $\triangle ABC$ 的陪位重心 K 作 $MN \parallel BC$, $PQ \parallel CA$, $ST \parallel AB$. 点 M, N, P, Q, T, S 在三边上, 记 $BC=a, CA=b, AB=c$, 则有 $TP:NS:QM = a^3:b^3:c^3$.

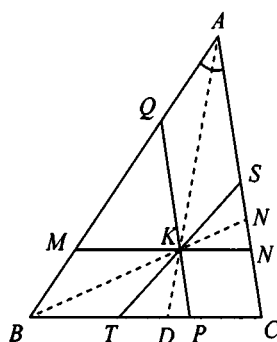


图 8

证明 连结 AK, BK 并延长分别交 BC, CA 于 D, E 点. 因为点 K 是 $\triangle ABC$ 的陪位重心, 所以 AD, BE 都是陪位中线.

所以由性质 1(2) 有 $\frac{BD}{DC} = \frac{c^2}{b^2}$.

$$\begin{aligned} \text{有 } \frac{QM}{NS} &= \frac{QM}{MK} \cdot \frac{MK}{KN} \cdot \frac{KN}{NS} \\ &= \frac{c}{a} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{a}{b} \\ &= \frac{c}{a} \cdot \frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{a}{b} = \frac{c^3}{b^3}, \end{aligned}$$

$$\text{同理 } \frac{QM}{TP} = \frac{c^3}{a^3}.$$

所以 $TP:NS:QM = a^3:b^3:c^3$.

性质 8 如图 9. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 BC 内, $\triangle ABC$ 的外接圆 O 上的过 B, C 的切线相交于 E 点, 则 AD 为 $\triangle ABC$ 的陪位中线的充要条件为 A, D, E 三点共线.^[3]

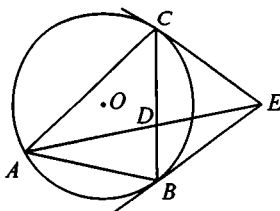


图 9

因为过三角形的一个顶点作对边的平行线, 与该顶点的中线及三角形过该顶点的两条边组成调和线束, 过此顶点的圆截这调和线束四条射线的交点组成的四边形为调和四边形.

当性质 8 的 A, D, E 三点共线时, 利用相似三角形进行推导, 并由性质 1(2), 可得如下性质.

性质 9 圆内接四边形为调和四边形的充要条件是其一条对角线为另一条对角线分该四边形所成三角形的陪位中线.^[3]

有了上述这些知识准备, 现在来解决一些问

题, 就比较容易了.

例 1 在 $\triangle ABC$ 中, 过点 C 作其外接圆 $\odot O_1$ 的切线交 AB 延长线于点 D , 再过 A, C 分别作 $\triangle ACD$ 的外接圆 $\odot O_2$ 的切线, 两切线交于 P 点.

求证: 直线 DP 平分线段 BC .

证明 如图 10, 设 PD 交 BC 于 M 点, AC 中点为 N , 连 DN . 因为 PA, PC 为 $\odot O_2$ 在 A, C 处的切线, 所以由性质 8, DP 为 $\triangle ADC$ 的陪位中线所在直线.

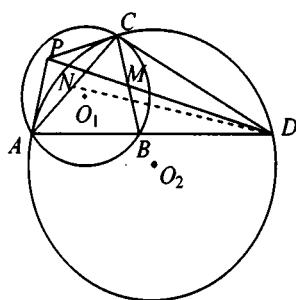


图 10

因为 $\angle CAD = \angle BCD, \angle ADC = \angle CDB$,

所以 $\triangle ACD \sim \triangle CBD$.

因为 $\angle ADN = \angle CDM$,

所以 AN 与 CM 为对应线段,

又 $AN = NC$,

所以得 $CM = MB$, 即直线 DP 平分线段 BC .

例 2 设 $\triangle ABC$ 是非等腰锐角三角形, 其高线 AD, BE 相交于 H 点. $\triangle ABH$ 的重心为 G 点, 若 CG 平分线段 DE , 试求 $\angle ACB$ 的度数.

解 如图 11, 设 $\triangle ABC$ 的外接圆心为 O 点, 连 CO 延长交 $\odot O$ 于 P 点, 连 PA, PB, PH .

由 $BH \perp AC, PA \perp AC$, 得 $PA \parallel BH$.

同理可得 $PB \parallel AH$.

所以四边形 $AHBP$ 为平行四边形;

令 AB 中点为点 M .

因为 G 点为 $\triangle ABH$ 的重心,

故 H, G, M, P 四点共线, 且有 $PG:GH=2$.

因为 CG 平分线段 DE , 设 $CG \cap DE = N$,

则 $DN = EN$.

由 A, B, D, E 四点共圆, 可得 $\triangle CDE \sim \triangle CAB$.

又由 N, M 点为 DE, AB 中点,

可得 $\angle NCD = \angle MCA$.

又因为 $\angle BCH = \angle ACP$,

所以 $\angle HCG = \angle PCM$.

所以由定义, CG 是 $\triangle CHP$ 的陪位中线.

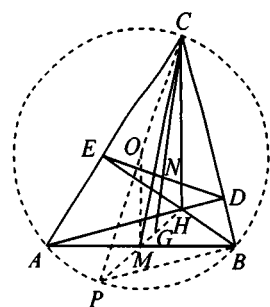


图 11

由性质 1(2) 可得 $\frac{CP^2}{CH^2} = \frac{PG}{GH} = 2$, 即 $\frac{CP}{CH} = \sqrt{2}$.

连 OM , 可得 $CH = 2 \cdot OM = CP \cdot \cos \angle ACB$,

即 $\cos \angle ACB = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

所以所求 $\angle ACB = 45^\circ$.

例 3 在 $\triangle ABC$ 中, K 点为其陪位重心, BE 垂直于 AC , E 为垂足, 若 $\angle AKE = 180^\circ - 2\angle BAC$, 求证: $\angle CKE = 180^\circ - 2\angle ACB$.

证明 如图 12, 作 $AD \perp BC$ 交 BC 于 D 点, $CF \perp AB$ 交 AB 于 F 点. 设 EF 、 ED 的中点分别为 M 、 N .

因为 $\angle BFC = \angle BEC = 90^\circ$, 所以 B 、 C 、 E 、 F 四点共圆. 故有 $\triangle AEF \sim \triangle ABC$.

因为 K 点为 $\triangle ABC$ 的陪位重心,

所以 AK 是 $\triangle ABC$ 的陪位中线, 所以由性质 3, AK 是 $\triangle AEF$ 的中线.

即 A 、 M 、 K 三点共线.

同理可得 C 、 N 、 K 三点共线.

所以 $MN \parallel FD$, $\angle MNE = \angle FDE$.

因为已知 $\angle AKE = 180^\circ - 2\angle BAC$, 再由 A 、 B 、 D 、 E 四点共圆, A 、 C 、 D 、 F 四点共圆.

所以 $\angle FDE = 180^\circ - (\angle BDF + \angle CDE)$
 $= 180^\circ - 2\angle BAC = \angle AKE = \angle MKE$.

故 $\angle MNE = \angle MKE$, M 、 K 、 N 、 E 四点共圆;

所以 $\angle CKE = \angle NKE = \angle NME = \angle DFE$
 $= 180^\circ - 2\angle ACB$.

例 4 (2005 国家集训队选拔考试题(二)第五题) 设锐角 $\triangle ABC$ 的外接圆为 ω . 过点 B 、 C 作 ω 的两条切线相交于点 P , 连结 AP 交 BC 于点 D , 点 E 、 F 分别在边 AC 、 AB 上, 使得 $DE \parallel BA$ 、 $DF \parallel CA$.

(1) 求证: F 、 B 、 C 、 E 四点共圆;

(2) 若记过 F 、 B 、 C 、 E 的圆的圆心为 A_1 , 类似地定义 B_1 、 C_1 , 则直线 AA_1 、 BB_1 、 CC_1 共点.

证明 (1) 由题意, 如图 13. 根据性质 8 可得 AD 是陪位中线.

再由性质 2 得 F 、 B 、 C 、 E 四点共圆.

(2) 设 $\triangle ABC$ 的陪位重心为 K , 则 K 在 AD 上.

观察图 5, 令由陪位重心 K 得到的六点圆的圆心为 O (显然 O 点具有唯一性), 由于四边形 $MNSQ$ 的顶点共圆, 它的圆心就是 O 点. 易证图 5 中的四边形 $MNSQ$ 与图 13 中的四边形 $BCEF$ 是两个位似形, 其位似中心是 A 点, 由位似形性质, 可得 A 、 O 、 A_1 三点共线, 即 AA_1 通过 O 点; 同理 BB_1 、 CC_1 也通过 O 点, 所以 AA_1 、 BB_1 、 CC_1 三线共点.

例 5 在 $\triangle ABC$ 中, 已知顶点 A 、重心 G 和其经过 A 点的陪位中线所在直线与 $\triangle ABC$ 外接圆的交点为 S , 然后擦去点 B 、 C 及其外接圆, 如图 14. 请从保留的三个已知点 A 、 G 、 S 出发, 作图画出原 $\triangle ABC$.

解 本题在给出定点 A 、 G 、 S 的情形下, 按照以下作法, 可作出原 $\triangle ABC$.

作法步骤:

1. 连结 AG 并延长至点 M , 使 $GM = \frac{1}{2}AG$;
2. 以 M 为圆心, MS 为半径作圆 c_1 ;
3. 设 AM 的延长线交圆 c_1 于点 T ;
4. 作 $\triangle AST$ 的外接圆为 c_2 ;
5. 过 M 作 TS 的平行线交圆 c_2 于点 B 、 C ;
6. 连结 A 、 B 、 C , 则 $\triangle ABC$ 即为所求, 如图 15.

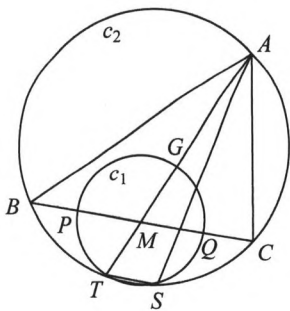


图 15

证明 因为 A 、 G 、 S 都是定点,

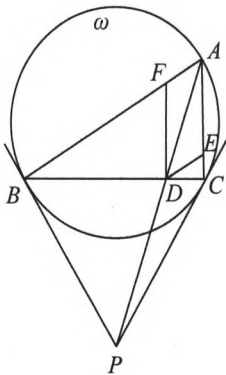


图 13

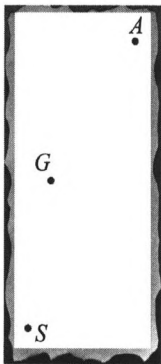


图 14

由作法知 $BC \parallel TS$,

故有在圆 c_2 中 $\widehat{BT} = \widehat{CS}$, $\angle BAT = \angle CAS$.

若设圆 c_1 交 BC 于 P, Q 点

则 $\triangle BPT \cong \triangle CQS$.

所以 $BP = CQ$, 故 $BM = CM$, M 为 BC 中点.

又因为 $GM = \frac{1}{2}AG$, 所以 G 点为 $\triangle ABC$ 的重心.

再由 $\angle BAM = \angle CAS$ 知,

$\triangle ABC$ 中过 A 点的陪位中线在直线 AS 上.

综上, 上述作法作出了原 $\triangle ABC$.

例 6 $\triangle ABC$ 的外接圆为 $\odot O$, 过 B, C 点分别作 $\odot O$ 的切线相交于 D 点, 边 AC, AB 的中点分别为 E, F 点, DC 交 BE 于 P 点, DB 交 CF 于 Q 点.

求证: $\angle BAQ = \angle CAP$.

证明 由题意可知, 设 $BE \cap CF = G$, 则 G 为 $\triangle ABC$ 的重心, 如图 16.

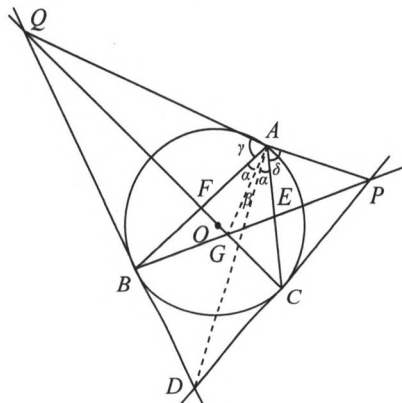


图 16

因为 DB, DC 是 $\triangle ABC$ 外接圆 $\odot O$ 的切线, 所以由性质 8, 直线 AD 为 $\triangle ABC$ 的陪位中线所在直线, $\angle BAG = \angle CAD$.

设 $\angle BAG = \angle CAD = \alpha$, $\angle DAG = \beta$,

$\angle BAQ = \gamma$, $\angle CAP = \delta$.

则有 $\frac{QB}{BD} = \frac{S_{\triangle ABQ}}{S_{\triangle ABD}} = \frac{AQ}{AD} \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin(\alpha + \beta)}$.

同理可得 $\frac{DP}{PC} = \frac{AD}{AC} \cdot \frac{\sin(\alpha + \delta)}{\sin \delta}$,

$$\frac{CG}{GQ} = \frac{AC}{AQ} \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \gamma)}.$$

因为 $\triangle CDQ$ 被直线 PGB 所截,

所以由 Menelaus 定理有

$$\frac{QB}{BD} \cdot \frac{DP}{PC} \cdot \frac{CG}{GQ} = 1.$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(\alpha + \delta) \sin \gamma}{\sin(\alpha + \gamma) \sin \delta} = 1$$

$$\Rightarrow \sin(\alpha + \gamma) \sin \delta = \sin(\alpha + \delta) \sin \gamma$$

$$\Rightarrow \sin(\gamma - \delta) = 0 \Rightarrow \gamma = \delta.$$

即 $\angle BAQ = \angle CAP$.

例 7 在 $\triangle ABC$ 中, $AB > AC$, 过点 A 作 $\triangle ABC$ 的外接圆 $\odot O$ 的切线, 与 BC 的延长线交于点 D , E 为 AD 的中点, BE 与 $\odot O$ 交于点 F .

求证: 直线 AF 是 $\triangle ACD$ 的陪位中线所在直线.

证法一 如图 17, 因为 AE 为 $\odot O$ 切线, E 为 AD 中点, 连接 DF ,

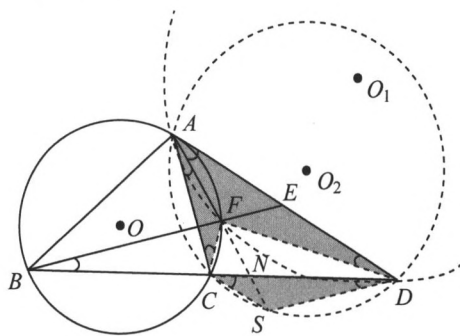


图 17

所以 $ED^2 = EA^2 = EF \cdot EB \Rightarrow \triangle DEF \sim \triangle BED$
 $\Rightarrow \angle FDA = \angle DBE = \angle FAC = \angle SDC$.

过点 A, F, D 作圆 $\odot O_1$, 过点 A, C, D 作圆 $\odot O_2$, 延长 AF 交 CD 于点 N , 交 $\odot O_2$ 于点 S ,

连接 FC, CS, DS ,

又因为 $\angle ACF = \angle DAF = \angle DCS$,

所以 $\triangle ACF \sim \triangle DAF \sim \triangle DCS$

$$\Rightarrow \frac{AF}{DS} = \frac{AC}{DC}, \frac{AF}{CS} = \frac{AD}{DC} \Rightarrow \frac{CS}{DC} = \frac{AC}{AD}$$

$$\Rightarrow \frac{CN}{ND} = \frac{S_{\triangle ASC}}{S_{\triangle ASD}} = \frac{AC \cdot CS}{AD \cdot DS} = \frac{AC^2}{AD^2}.$$

由性质 1(2) 可得, 直线 AF 是 $\triangle ACD$ 的陪位中线所在直线.

证法二 如图 18, 连接 CF, DF .

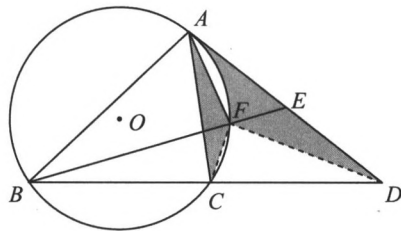


图 18

(下转封底)

学习园地

- 从光学极值思想到最速降线问题 马文东 4(51)
- 由圆围成两个圆锥体积和的最大值的讨论 赵虹 王丽新 5(54)
- 关于“L 函数”的一则注记 汪健 6(54)
- 闵科夫斯基平面 M^2 和闵科夫斯基变换 赵旭安 11(60)

学生习作

- 一个不等式的推广 张乐千 1(48)
- 矩阵秩的两种定义 李逸然 2(47)
- 一类递推数列的通项公式及其应用 王福水 5(56)

竞赛园地

- 第二十二届北京高中数学知识应用竞赛初赛参考解答 1(49)
- 第二十二届北京高中数学知识应用竞赛决赛试题及参考答案 4(54)

读刊随笔

- 数学问题 2313 号引致的一条不等式链 何灯 1(46)
- 证题过程不轻言易证 郑步春 4(58)
- 圆外切四边形一个性质的探索与发现 李飞 6(58)
- 数学问题 2336 题的简解与推广 吕永军 7(60)
- 从平面向量的角度认识数学问题 2392 李伟健 7(62)
- 一个无理分式不等式猜想的证明 刘春平 9(60)

- 欧拉不等式的一个加强的改进 ... 张青山 9(61)

初数研究

- 一个三角等式证明及其应用 杨学枝 1(55)
- 一类条件代数不等式统一推广的拾遗 李汝雁 郭要红 孟庆利 2(58)
- 探索任意四边形的余弦定理 田传弟 2(62)
- 圆锥曲线中相交圆的一个定点命题 李伟健 3(59)
- Guggenheimer 不等式的高次加权推广 费红亮 曾善鹏 杨学枝 5(58)
- 几个三角形不等式的再推广 李永利 5(60)
- 从 Nesbitt 不等式引出的探究 安振平 6(61)
- Finsler-Hadwiger 型不等式推广的再研究 王洪燕 郭要红 7(54)
- 基于椭圆光学性质的两个类包络现象的发现之旅 邵俊杰 李金兴 7(56)
- 斐波那契数列的推广与性质 胡涛 8(58)
- 关于三角形内角一个新的不等式及其应用 李永利 9(56)
- 一个布利安香点特殊情形在解题中的应用 李伟健 10(59)
- 一道动点类竞赛不等式的加强与推广 费红亮 曾善鹏 12(52)
- 陪位中线与陪位重心 汪学思 12(54)

书评

- 数学教学设计要彰显系统的思想 陈汉君 1(60)

会议简讯

- 2019 年《数学通报》总目次 12(63)

(上接第 58 页)

因为 AE 为 $\odot O$ 切线, E 为 AD 中点,
所以 $ED^2 = EA^2 = EF \cdot EB$
 $\Rightarrow \triangle DEF \sim \triangle BED$
 $\Rightarrow \angle FDA = \angle DBE = \angle FAC$.
又 $\angle DAF = \angle ACF$,
所以 $\triangle ACF \sim \triangle DAF$.
 $\Rightarrow \frac{AF}{FC} = \frac{AD}{AC}$
 $\Rightarrow \frac{\sin \angle CAF}{\sin \angle DAF} = \frac{\sin \angle CAF}{\sin \angle ACF} = \frac{FC}{AF} = \frac{AC}{AD}$.
由性质 1(1) 可得, 直线 AF 是 $\triangle ACD$ 的陪位中线所在直线.

此两种证法都可谓典型. 证法一的证明过程中, 通过作辅助线, 从中展示了其内在的各点线间的关系, 虽繁杂却有序; 证法二辅助线很少, 体现出一种精巧的细致美, 给人以一种“简约而不简单 丰富而不繁复”的感受.

参考文献

- [1] 梁绍鸿编, 赵兹庚校. 初等数学复习及研究(平面几何)[M]. 北京: 人民教育出版社, 1958, 11: 171
- [2] 单增主编. 数学名题词典[M]. 南京: 江苏教育出版社, 2002, 6: 431
- [3] 沈文选. 三角形共轭中线的性质及应用[J]. 中等数学, 2016(2)

ISSN 0583-1458



刊号: ISSN 0583-1458
CN11-2254/O1

全国各地邮局订购
代号: 2-501

全年定价: 120.00 元
每期定价: 10.00 元